فصل دوم

تابع

نگاه کلی به فصل دوم

اهداف کلی

- تکمیل مفاهیم و نمادگذاری‌ها برای توابع
- آشنایی با تساوی توابع
- آشنایی با توابع چندضابطه‌ای
- آشنایی با معادلات شامل دو متغیر که توابعی را معین می‌کنند.
- آشنایی با رسم توابعی که از توابع آشنا با انقباض و انبساط افقی و عمودی ساخته شده‌اند.
- آشنایی با اعمال جمع و ضرب و تقسیم توابع
- آشنایی با ترکیب توابع
- آشنایی با توابع زوج و فرد و صعودی و نزولی
- آشنایی با ویژگی یک به یک بودن و وارون‌پذیری توابع
- آشنایی با شیوه محاسبه تابع وارون
- آشنایی با توابع متناوب و چندجمله‌ای
- آشنایی با توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

عملکرد مورد انتظار از دانش آموز

دانش آموزان باید بتوانند:

- در مشخص کردن یک تابع، دامنه و ضابطه و مجموعه‌ای که مقدارهای تابع رادر بر دارد معین کنند و با نمادگذاری‌های مناسب بیان کنند.
- دو تابع که به شکل‌های متفاوتی داده شده‌اند را از لحاظ دامنه و ضابطه بررسی کنند و تساوی یا عدم تساوی آنها را تشخیص دهند.
- توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارند درک کنند و به شکل مناسب بیان کنند.
- با داشتن یک معادله دو متغیره، بررسی کنند که آیا تابعی با این معادله مشخص می‌شود و دامنه و ضابطه این تابع چیست.
- توابع داده شده را تجزیه و تحلیل کنند و آنها را در صورت امکان به صورت انتقال یافته یا منبسط و منقبض شده یک تابع آشنا درآورند و از این طریق این توابع را رسم کنند.
- جمع و ضرب توابع را انجام دهند و توابع جدید را به دست آورند.

آموزش فصل دوم

- امکان ترکیب دو تابع را بررسی کنند و تابع ترکیب یافته را محاسبه کنند و دامنه ترکیب دو تابع را مشخص کنند.
- توابع زوج و فرد را به طور جبری و نموداری تشخیص دهند و از این ویژگی در محاسبات جبری و رسم نمودار آنها استفاده کنند.
- توابع صعودی و نزولی را به طور جبری و نموداری تشخیص دهند و از این ویژگی در محاسبات جبری و رسم نمودار آنها استفاده کنند.
- برای توابع داده شده، از طریق نمودار، بازه‌هایی از دامنه که تابع روی آنها صعودی یا نزولی است مشخص کنند.
- یک به یک بودن توابع را به طور جبری و نموداری تشخیص دهد.
- نمودار یک تابع را تفسیر کنند و از نمودار تابع اطلاعاتی را اسنخراج نمایند.
- به کمک نمودار تابع در مورد پدیده ها پیش بینی نمایند.
- شرایط وارون‌پذیری توابع را به طور جبری و نموداری بررسی کنند و دامنه و برد و ضابطه تابع وارون را محاسبه کنند و نمودار آن را رسم کنند.
- توابع چندجمله‌ای را تشخیص دهند.

آموزش فصل دوم

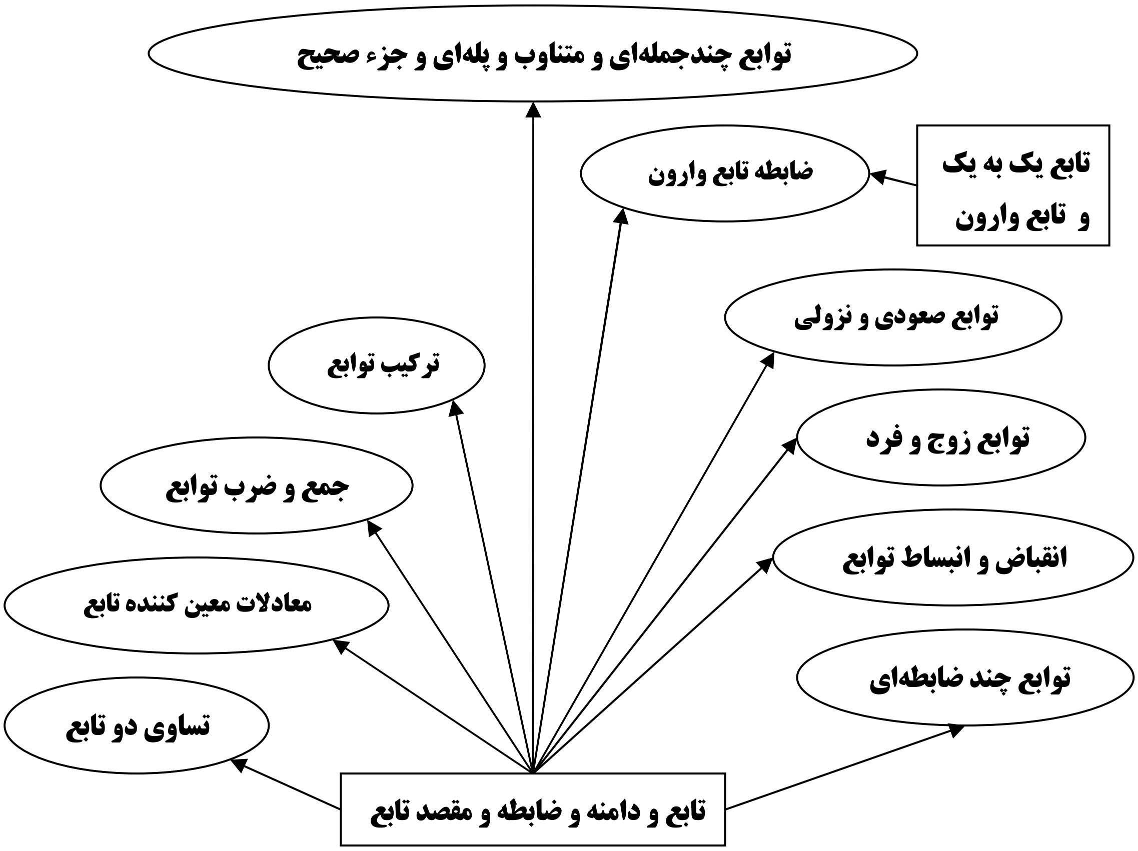
- توابع متناوب را از طریق جبری و نموداری تشخیص دهند.
- توابع پله‌ای را از طریق جبری و نموداری تشخیص دهند.
- نمودار تابع جزء صحیح و توابع وابسته به آن را رسم کنند و محاسبات جبری مربوط به آنها را انجام دهند.

زمانبندی پیشنهادی برای این فصل یک ماه و نیم است.

پیشنیازها

- آشنایی با مفاهیم اولیه تابع
- آشنایی با معادلات و نامعادلات و حل آنها
- آشنایی با محاسبات جبری

طرح کلی مفاهیم فصل دوم



مستطیل ها نشان دهنده مفاهیم قبلی و بیضی ها نشان دهنده مفاهیم جدید هستند.

طرح آموزشی فصل دوم

هدف اصلی این فصل تکمیل و تعمیق مفاهیم اساسی مربوط به تابع است. به همین خاطر مفاهیم متنوعی از تابع ارائه شده است. فرودنتال (۱۹۸۳) دلخواه بودن و یکتایی(یک بنیانی) بودن را به عنوان ویژگی‌های اساسی تابع، به شکلی که در طول تاریخ تکامل پیدا کرده است در نظر می‌گیرد. طبیعت دلخواه تابع، هم به ارتباط بین دو مجموعه، که بین آنها تابع تعریف می شود، و هم به خود مجموعه ها برمی گردد. علاوه بر این، روی بازنمایی‌های مختلف تابع تاکید می شود. درک یک مفهوم در یک بازنمایی آن لزوما به این معنی نیست

که دانش‌آموز آن را در هر بازنمایی دیگر نیز درک می کند. دانش‌آموزان باید مفاهیم را در بازنمایی‌های مختلف آن درک کنند و قادر باشند که آن‌ها را به یکدیگر تبدیل کنند و بین آن‌ها ارتباط برقرار کنند. بازنمایی‌های مختلف بصیرت‌های متفاوتی را ایجاد می‌کنند و امکان یک درک بهتر، عمیق‌تر و نیرومندتر و کامل‌تر را فراهم می‌کنند. همانند دیگر بخش‌های کتاب ایجاد ارتباط بین دانش مفهومی و دانش رویه‌ای نیز مورد نظر بوده است. دانش‌آموزان وقتی دانش مفهومی مناسبی از مطلب موردنظر داشته باشند، قادر به حل انوع مسائل مرتبط با آن مطلب نیز خواهند بود. کسانی که درک کافی از مطلب مورد نظر ندارند، برای حل هر نوع مسئله ای مرتبط با مطلبی که قبلا با آن مواجه نشده اند، وابسته به رویه‌های جدید ی هستند که معلم به آن‌ها معرفی می‌کند.

روش اصلی آموزشی این فصل ایجاد تجربه نسبت به مفاهیم جدید از طریق انجام یک فعالیت است. در این فعالیت‌ها دانش‌آموزان غیر مستقیم مفهوم مورد نظر را تجربه می‌کنند و برای دیدن تعریف کلی مفهوم آمادگی پیدا می‌کنند. سپس در چند مثال مفهوم در زمینه‌های مختلف به نمایش درمی‌آید و در تمرین در کلاس‌ها مفاهیم تثبیت می‌شوند.

بخش‌های: تابع و تساوی توابع و توابع چندضابطه‌ای و معادلات و توابع

اهداف بخش

- تکمیل مفاهیم و نمادگذاری‌ها برای توابع
- آشنایی با تساوی توابع
- آشنایی با توابع چندضابطه‌ای
- آشنایی با معادلات شامل دو متغیر که توابعی را معین می‌کنند.

نگاه کلی به بخش

این بخش با یادآوری مفهوم تابع و نمایش ون از تابع شروع می‌شود. سپس در یک فعالیت بر این نکته تاکید می‌شود که دامنه یک تابع جزئی از تعریف تابع است و در تعریف یک تابع مشخص کردن دامنه نیز قرار دارد. در ادامه به مفهوم تساوی دو تابع پرداخته می‌شود و سعی

می‌شود به طور طبیعی این مفهوم ارائه شود. سپس به برخی از توابع که ضابطه آنها در قسمت‌های مختلف دامنه تغییر می‌کند پرداخته می‌شود و سعی شده است که در یک مثال واقعی چگونگی ایجاد این گونه توابع دیده شود. شیوه دیگری از ساختن توابع از طریق معادلات دو متغیره است که در چند مثال ارائه شده است.

ورود به مطلب

شیوه مناسب برای ورود به مفاهیم این بخش ارائه مثال‌های متعدد در زمینه‌های واقعی است. سپس می‌توان مفاهیم را در حالت کلی بیان کرد.

فعالیت آموزشی

این بخش جنبه یادآوری دارد و تمرین در کلاس اول این بخش تمرینی روی مفهوم تابع است.

حل تمرین در کلاس (صفحه ۴۴)

الف) زیرا برای هر محصولی یک و فقط یک نوع کیفیت را می‌توان در نظر گرفت.

ب) برد یکی {الف} است که زیرمجموعه‌ای سره از B است و برد دیگری تمام B است.

ج) ۸ تابع از A به B می‌توان ایجاد کرد که برد ٦ تای آنها تمام B است.

حل تمرین در کلاس (صفحه ۴۵)

(الف) ، (د) ، (و)

حل فعالیت ۱ (صفحه ۴۵)

۱.

تابع	$f(x)=x^{۲}$	$g(x)=x^{۲}$	$h(x)=۴x+۱$	$t(x)=x-۲$	$s(x)=x-۲$
دامنه	اعداد حقیقی مثبت	اعداد حقیقی منفی	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$[۲,۳]$
برد	اعداد حقیقی مثبت	اعداد حقیقی مثبت	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$[0,1]$

آموزش فصل دوم

۲. دو تابع f و g ضابطه و برد یکسانی دارند ولی دامنه آنها متفاوت است. دو تابع h و t دامنه و برد یکسانی دارند ولی ضابطه آنها متفاوت است. دو تابع t و s ضابطه یکسانی دارند ولی دامنه و برد آنها متفاوت است.

حل مسائل (صفحه ۴۷)

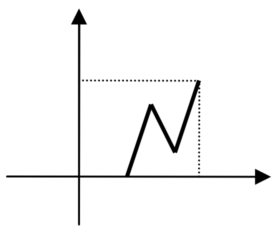
۱. ۱۶ تابع وجود دارد.

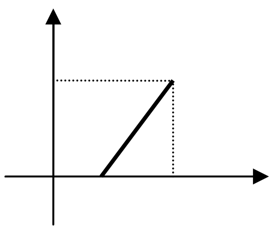
۲. n^m تابع وجود دارد. می‌توانید برای مجموعه‌های کوچک این رابطه را حدس بزنید و با استقرا روی m آن را ثابت کنید.

۳. در این مسئله منظور آن است که تابع با ضابطه معرفی شود و طبق قرارداد دامنه آن بازه $[-۲,+\infty)$ باشد. مثلا $y=\sqrt{2+x}$

این نمونه‌ای از یک مسئله پاسخ باز به حساب می‌آید. در حل مسئله پاسخ–باز برای مسئله چندین راه حل یا پاسخ احتمالی وجود خواهد داشت که هر کدام را به نوبه خود می‌توان از چند روش متفاوت به دست آورد. در اینجا تنها پاسخ مسئله دارای اهمیت نیست، بلکه تمرکز و تاکید بر شیوه‌های رسیدن به پاسخ است. به گفته پولیا همان گونه که دریافت از راه دو حس مختلف را ترجیح می‌دهیم، به همان گونه متقاعد شدن از راه دو استدلال متفاوت را ترجیح می‌دهیم. بررسی و تحلیل پاسخ‌ها و شیوه‌های متفاوتی که توسط دانش‌آموزان ارائه می‌شود نتایج آموزشی مناسبی به همراه خواهد داشت.

۴. در این مسئله می‌توانید نموداری برای توابع مورد نظر رسم کنید.





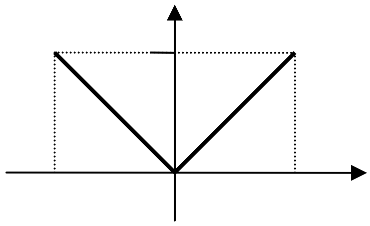
۵. $S=\frac{1}{2}W(20-W)$

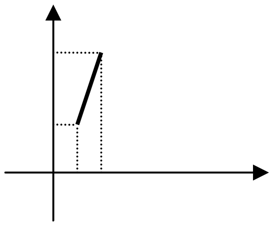
۶. عدد کوچکتر را x و عدد بزرگتر را y می‌نامیم، پس $y=x+12$ و

$$S=xy=x(x+12)$$

۷. عرض مستطیل را با x و ضلع دیگررا با y نشان می‌دهیم. داریم $3x+2y=150$، بنابراین $y=75-\frac{3}{2}x$ و $S=xy=x(75-\frac{3}{2}x)$.

۸.





۹. $l = \sqrt{x^2 + \frac{625}{x^2}}$

۱۰. این مسئله به فصل قبل مربوط است و باید حذف شود.

۱۱. الف)نادرست　　ب) درست　　ج) نادرست　　د)نادرست

حل تمرین در کلاس (صفحه ۴۹)

در حالات (د) و (ه) و (و) مساویند، در بقیه حالات مساوی نیستند.

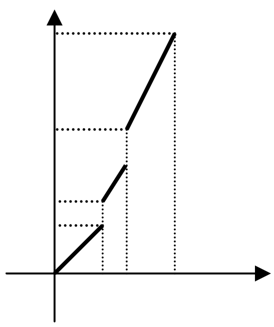
حل فعالیت ۲ (صفحه ۵۰)

الف) ۷۵۰۰ تومان

ب)

کرایه حمل	وزن کالا x
$2x$	$0 \leq x < 2000$
$3x$	$2000 \leq x < 3000$
$4x$	$3000 \leq x < 5000$

ج) هر واحد روی محور xها را برابر ۱۰۰۰ کیلو و هر واحد روی محور yها را برابر ۲۰۰۰ تومان می‌گیریم.



د) $$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<2000\\ 3x & 2000\le x<3000\\ 4x & 3000\le x\le 5000\end{cases}$$

حل تمرین در کلاس (صفحه ۵۱)

۱. الف) $f(x)=\begin{cases}1 & x<2\\ 3 & 2<x\end{cases}$ ب) $f(x)=\begin{cases}-2 & x<-1\\ \frac{3}{4}(x+1) & -1\le x\end{cases}$

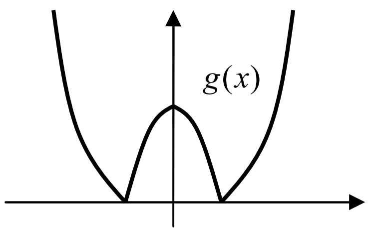
۲. رسم این توابع آسان است.

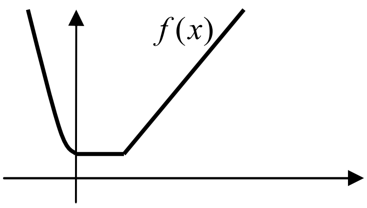
حل مسائل (صفحه ۵۲)

۱. باید با تقسیم بندی دامنه به بازه‌های مختلف علامت عبارت‌های $x+1$ و $x-1$ در آن بازه‌ها معین باشد. این بازه‌ها $(-\infty\,,-1]$ و $[-1\,,\,1]$ و $[1\,,\infty)$ هستند.

$$f(x)=\begin{cases}-2x & x\le -1\\ 2 & -1\le x\le 1\\ 2x & 1\le x\end{cases}$$

۲.

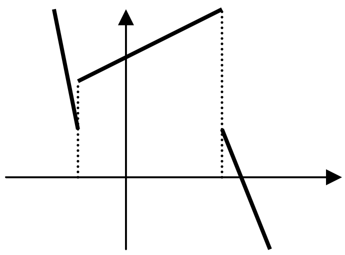




۳. الف) دامنه، بازه $[-4\,,\infty)$ است و برد مجموعه $(-\infty\,,-1]\cup[1\,,3]$ است و ضابطه تابع به صورت $f(x)=\begin{cases}x+5 & -4\le x\le -2\\ 1 & 2<x<1\\ -\frac{2x+3}{5} & 1\le x\end{cases}$ است.

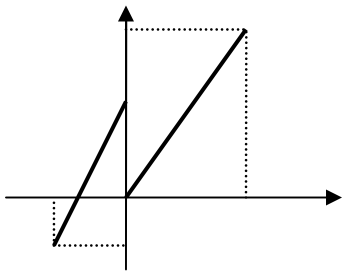
ب) دامنه، تمام $I\!R$ است و برد مجموعه $\{-2\}\cup[-1\,,\infty)$ است و ضابطه تابع به صورت $g(x)=\begin{cases}-\frac{5x+7}{2} & x\le -1\\ x & -1<x<2\\ -2 & 2\le x\end{cases}$ است.

٤. $f(0)=5\,,\ f(-4)=12\,,\ f(4)=7\,,\ f(6)=-2$



۵. جواب این مسئله یکتا نیست و به شیوه‌های گوناگون می‌توان از این توابع ساخت. مثلا

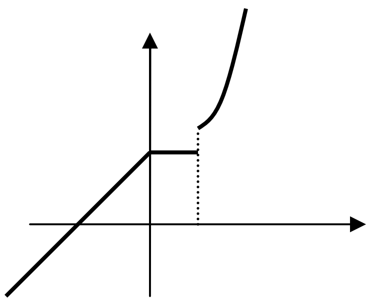
$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & -3\le x<0\\ 3 & x=0\\ x+2 & 0<x\le 5\end{cases}$$



٦. (ب) و (ج) و (و) تابع معین می‌کنند.

۷. ضابطه تابع به شکل زیر است.

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & x<0\\ 3 & 0\le x\le 2\\ x^2 & 2<x\end{cases}$$



۸. بلی زیرا دامنه آنها مساوی است و برای هر x در دامنه(که کل $\mathbb{R}$ است)، داریم

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

۹. در (ج) و (د) مساویند و در (الف) و (ب) مساوی نیستند.

۱۰.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{5}(x+6) & -6\le x\le -1\\ -\frac{2}{5}(x-4) & -1<x\le 4\end{cases}$$

ارزیابی یاد گیری

در این قسمت دانش‌آموزان باید بتوانند نمادگذاریهای مناسب برای ارائه توابع بکارگیرند و مثالهای توابع را در مسائل واقعی تشخیص دهند و آنها را به صورت جبری و نموداری بیان کنند. دانش‌آموزان باید بتوانند برای دو تابع داده شده دامنه و ضابطه آنها را تشخیص دهند و از این طریق تساوی یا عدم تساوی آنها را مشخص کنند. همچنین دانش‌آموزان باید بتوانند تشخیص دهند در معادلات دو متغیره آیا تابعی مشخص می‌شود، و در این صورت تابع را به دست آورند.

محدوده مطالب

در این قسمت می‌توان مسائل نسبتا پیچیده‌ای مطرح کرد ولی فقط باید مسائلی را طـرح کـرد که در سطح ارائه شده در کتاب باشد.

بخش: رسم نمودار توابع

اهداف بخش

- آشنایی با انتقال عمودی و افقی توابع و رسم آنها
- آشنایی با انقباض و انبساط عمودی و افقی توابع و رسم آنها
- آشنایی با قرینه افقی و عمودی توابع
- توسعه توانایی دانش‌آموزان در رسم توابع

نگاه کلی به بخش

در این بخش قصد بر آن است که توانایی‌های دانش‌آموزان در رسم نمودار توابع افزایش بیابد. برای این کار اعمال انتقال عمودی و افقی و انبساط و انقباض عمودی و افقی و قرینه‌های

عمودی و افقی توابع مورد بررسی قرار گرفته است. به کمک این عملیات می‌توان از نمودار یک تابع آشنا، نمودار توابع زیادی را به دست آورد.

ورود به مطلب

ارائه مثالهای متنوع از توابع با دامنه‌های محدود درک بهتری از مفاهیم این بخش ایجاد می‌کنند.

فعالیت آموزشی

ابتدا یادآوری از انتقال عمودی و افقی نمودار توابع می‌شود و سپس به بررسی انبساط و انقباض عمودی نمودار توابع پرداخته می‌شود.

حل فعالیت ۳ (صفحه ۵۵)

.۱

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	۰	۱−	۰	۱	۰
$3\sin x$	۰	۳−	۰	۳	۰

مقادیر تابع g در هر نقطه، ۳ برابر مقادیر تابع f است و مانند آن است که نمودار f با ضریب ۳ انبساط یافته است.

۲. در اینجا مقادیر تابع h در هر نقطه نصف مقادیر تابع f است و مانند آن است که نمودار f با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض شده است.

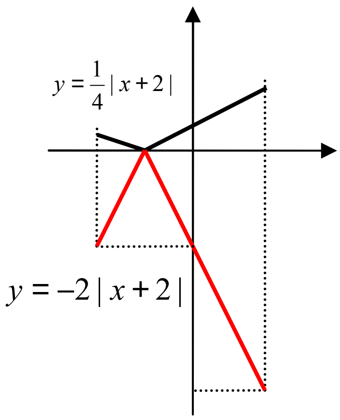
پس از این فعالیت چگونگی نمودار تابع $-f$ و رابطه آن با نمودار f توضیح داده می‌شود و نتایج به دست آمده جمع‌بندی میشود.

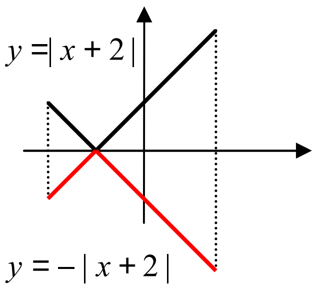
آموزش فصل دوم

حل تمرین در کلاس (صفحه ۵۷)

۱. بردهای دو تابع $f(x)$ و $af(x)$ در حالت کلی متفاوتند و اگر برد $f(x)$ مجموعه B باشد برد $af(x)$ مجموعه $\{ay|y \in B\}$ است.

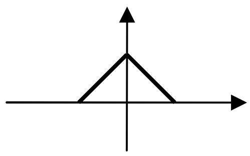
۲.



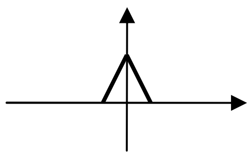


حل فعالیت ۴ (صفحه ۵۷)

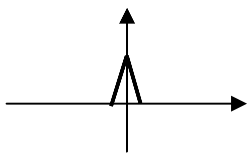
۱.



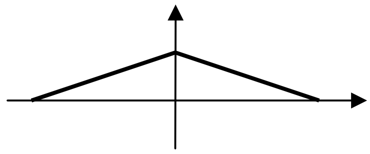
الف) باید داشته باشیم $-1 \le 2x \le 1$ بنابراین $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ و دامنه تابع $f(2x)$ بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ است و ضابطه آن به صورت $f(2x)=1-|2x|=1-2|x|$ است. نمودار این تابع به شکل زیر است.



ب) برای آن که مقدار $f(3x)$ تعریف شده باشد باید $-1 \le 3x \le 1$ بنابراین $-\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3}$ و دامنه تابع $f(3x)$ بازه $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ است و ضابطه آن به صورت $f(2x)=1-|3x|=1-3|x|$ است. نمودار این تابع به شکل زیر است.



برای آن که مقدار $f(\frac{1}{3}x)$ تعریف شده باشد باید $-1\le \frac{1}{3}x\le 1$ بنابراین $-3\le x\le 3$ و دامنه تابع $f(\frac{1}{3}x)$ بازه $[-3\,,3]$ است و ضابطه آن به صورت $f(\frac{1}{3}x)=1-|\frac{1}{3}x|=1-\frac{1}{3}|x|$ است. نمودار این تابع به شکل زیر است.

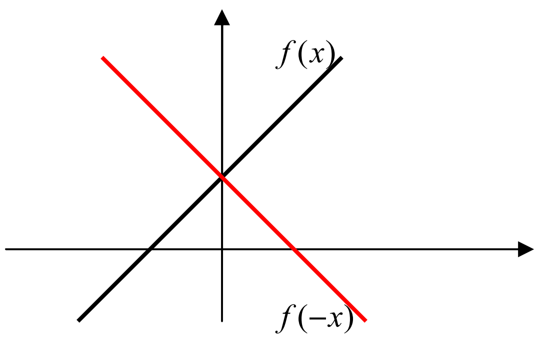


۳. اگر دامنه تابع f بازه $[c\,,d]$ باشد، برای آن که مقدار $f(ax)$ تعریف شده باشد باید $c\le ax\le d$ بنابراین $\frac{c}{a}\le x\le \frac{d}{c}$ و دامنه تابع $f(ax)$ بازه $[\frac{c}{a}\,,\frac{d}{a}]$ است. اگر $1<a$ دامنه کوچکتر می‌شود و تابع منقبض می‌شود و اگر $0<a<1$ دامنه بزرگتر می‌شود و تابع منبسط می‌شود. مقادیر تابع هیچ تغییری نمی‌کنند و مانند آن است که نمودار تابع به طور افقی منقبض یا منبسط می‌شود.

در ادامه، این مفاهیم در مثال‌های بیشتری توضیح داده می‌شوند و مطالب به دست آمده جمع‌بندی می‌شوند.

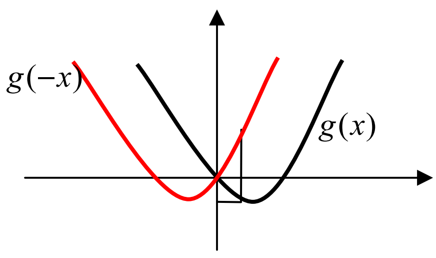
حل فعالیت ۴ (صفحه ۶۰)

۱. داریم $f(-x)=1-x$ و



۲. نمودار این دو تابع نسبت به محور yها قرینه یکدیگرند.

۳. داریم $g(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x$ و نمودار این دو تابع به شکل زیر است.



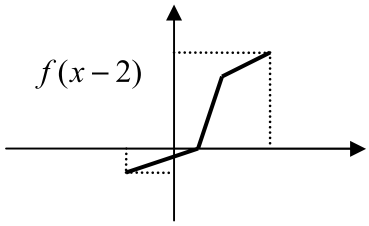
آموزش فصل دوم

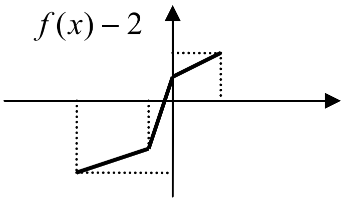
در اینجا نیز نمودار دو تابع $g(x)$ و $g(-x)$ نسبت به محور yها قرینه یکدیگرند.

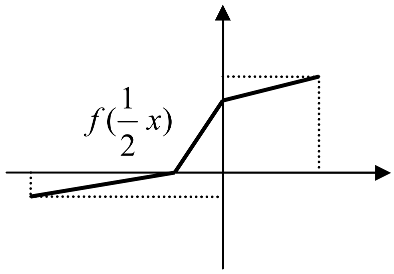
حل تمرین در کلاس (صفحه ۶۱)

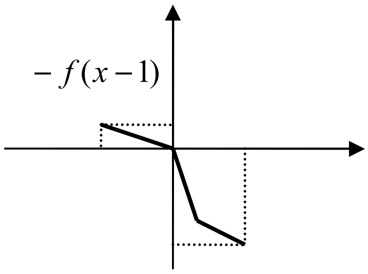
۱. نمودار بالا سمت راست مربوط به $g(2x)$ است. نمودار بالا سمت چپ مربوط به $g(\frac{1}{2}x)$ است. نمودار وسط سمت راست مربوط به $-2g(x)$ است. نمودار وسط سمت چپ مربوط به $g(-\frac{1}{2}x)$ است. نمودار پایین مربوط به $2g(x)$ است.

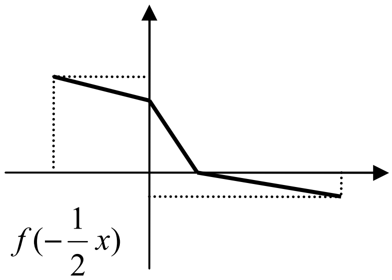
۲.

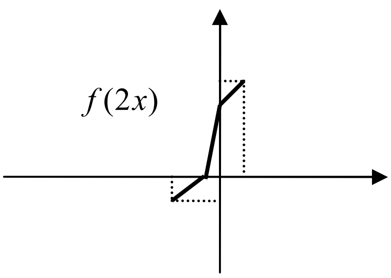












حل مسائل (صفحه ۶۴)

۱. نمودار تابع $|x|$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم سپس با ضریب ۳ به طور عمودی منبسط می‌کنیم و بعد ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

۲. همانند تمرین در کلاس عمل می‌شود.

الف) انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{2}$

ب) قرینه کردن نسبت به محور y ها

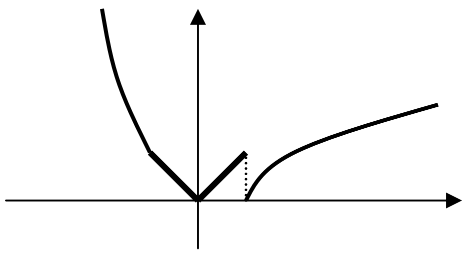
ج) انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{3}$

د) انبساط افقی با ضریب ۲ و سپس قرینه کردن نسبت به محور y ها

ه) انبساط عمودی با ضریب ۲ و سپس قرینه کردن نسبت به محور x ها

و) انتقال افقی ۲ واحد به سمت چپ

.۳



با انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ و قرینه کردن نسبت به محورها شکل‌ها رسم می‌شوند.

٤. الف) نادرست ب) نادرست ج) درست

۵. از روی شکل می‌توان نمودار را ابتدا با ضریب ۲ به طور افقی منبسط کرد وسپس ۲ واحد به چپ منتقل کرد و سپس نسبت به محور xها قرینه کرد و سپس ۳ واحد به پایین منتقل کرد. یعنی $g(x) = -|\frac{1}{2}(x+2)| - 3$

٦. $y = \sqrt{-(x-3)} - 5$

۷. الف) (۳ ، ۸-) ب) (٦ ، ۸) ج) (۳ ، ۸-) د) (۱۸ ، ۸-)

۸. الف) ۱ واحد انتقال به راست، سپس انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{2}$، سپس قرینه سازی نسبت به محور xها، سپس ۳ واحد انتقال عمودی به بالا

ب) ٤ واحد انتقال به چپ، سپس انبساط عمودی با ضریب ۲ ، سپس قرینه سازی نسبت به محور xها، سپس ۳ واحد انتقال عمودی به پایین

ج) $\frac{1}{3}$ واحد انتقال به راست، سپس انبساط عمودی با ضریب ۲ ، سپس قرینه سازی نسبت به محور xها، سپس ۱واحد انتقال عمودی به بالا

۹. همانند تمرین در کلاس با انبساط و انقباض افقی و قرینه سازی نسبت به محورها شکل‌ها رسم می‌شوند. مناسب یادآوری شود که در مورد تابع خاص $\cos x$ قرینه سازی نسبت به محور yها خود تابع است زیرا $\cos(-x) = \cos x$ و قرینه سازی نسبت به محور xها مانند انتقال افقی است زیرا $-\cos x = \cos(x-\pi)$.

۱۰. نمودار دو تابع $\sqrt{x}$ و $\sqrt{-x}$ نسبت به محور yها قرینه یکدیگرند. دامنه این دو تابع نیز در اعداد حقیقی قرینه یکدیگرند. برد این دو تابع مساوی است. در مورد دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ نیز وضعیت نمودارها و دامنه و برد به همین صورت است.

۱۱. ابتدا عمل انبساط یا انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{|a|}$ انجام می‌شود، سپس قرینه سازی نسبت به محور yها انجام می‌شود.

ارزیابی یادگیری

ارائه چند تابع به صورت جبری و نموداری که دامنه آنها محدود و حتی نقطه‌ای باشند و توانایی دانش‌آموزان در رسم توابع منبسط یا منقبض شده آنها و حتی ترکیبی از این عملیات نشان دهنده درک دانش‌آموزان از این عملیات است. عمل معکوس ارائه نمودار دو تابع و یافتن عملیاتی که به کمک آنها بتوان از نمودار یکی، دیگری را به دست آورد نشان دهنده درک بالاتری از این مفاهیم خواهد بود.

بخش‌های: اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

اهداف بخش

- آشنایی با اعمال جمع و ضرب و تقسیم توابع
- آشنایی با ترکیب توابع

نگاه کلی به بخش

این بخش با فعالیتی آغاز می‌شود تا مفهوم جمع توابع را به طور طبیعی ارائه کند. سپس این مفهوم رسما و در حالت کلی بیان می‌شود. سایر عملیات تفریق و ضرب و تقسیم توابع مستقیما بیان می‌شوند.

در قسمت بعد مفهوم ترکیب توابع نیز از طریق یک فعالیت ارائه می‌شود و از طریق نمودار ون این مفهوم توضیح داده می‌شود و بعد این مفهوم رسما در حالت کلی تعریف می‌شود.

آموزش فصل دوم

ورود به مطلب

در این بخش‌ها ارائه مثال‌های واقعی در زمینه‌های طبیعی ورود مناسبی برای این مفاهیم هستند. ابتدا در مثال‌های خاص مفهوم اصلی را باید تجربه کرد و بعد صورت کلی مفهوم را بیان کرد.

فعالیت آموزشی

در این فعالیت مفهوم جمع توابع ساخته می‌شود.

حل فعالیت ۶ (صفحه ۶۶)

.۱

t	$\frac{1}{2}$	2	3	$\frac{7}{2}$	4	5
حجم آب خارج شده از شیر اول	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{5}{2}$
حجم آب خارج شده از شیردوم	$\frac{1}{2}$	2	3	$\frac{7}{2}$	4	5
حجم آب موجود در حوض	$\frac{3}{4}$	3	$\frac{9}{2}$	$\frac{21}{4}$	6	$\frac{15}{2}$

.۲ $f(t)=\frac{1}{2}t$ ، $g(t)=t$ ، $k(t)=\frac{3}{2}t$.

.۳ به ازای هر مقدار t، $k(t)$ مجموع $f(t)$ و $g(t)$ است.

.٤ طول پاره‌خط بین نمودار آبی و قرمز برابر طول پاره‌خط بین محور xها و نمودار سبز است.

پس از این فعالیت مفهوم جمع دو تابع رسما تعریف شده است و در یک مثال توضیح داده شده است.

سپس یک بحث در کلاس آمده است که مطلب نسبتا ساده‌ای پرسش شده است که دانش‌آموزان باید روشی را برای استدلال درستی آن ارائه کنند.

در تعریف جمع دو تابع دامنه‌های این دو تابع یکسان فرض شده است ولی در عمل ممکن است حالاتی پیش آید که بخواهیم توابع با دامنه‌های غیر یکسان را جمع کنیم. در این حالت مجموع دو تابع روی اشتراک دامنه دو تابع قابل تعریف است. این عمل مانند آن است که ابتدا دامنه دو تابع را به قسمت مشترک محدود کنیم، سپس مانند حالت قبل دو تابع را جمع کنیم.

در ادامه مستقیما اعمال تفاضل و ضرب و تقسیم توابع نیز تعریف می‌شوند و در مثال‌هایی توضیح داده می‌شوند.

حل تمرین در کلاس (صفحه ۷۰)

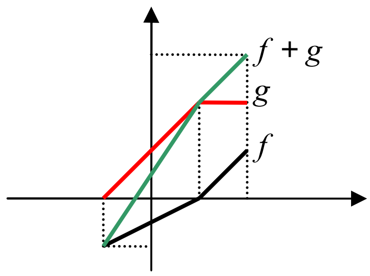
۱. دامنه توابع $f+g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ همگی بازه $[0\,,\,\infty)$ است و

$$(f+g)(x) = x + \sqrt{x} + 1$$
$$(f.g)(x) = \sqrt{x}(x+1)$$
$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

۲. الف)

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 2 = 2$$
$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 1 + 2 = 3$$

ب) توابع f و g هر کدام روی بازه‌های $[1,2]\,,\,[-1,1]$ به صورت یک خط هستند و جمع آنها نیز روی این بازه‌ها به صورت خط است، پس برای رسم کافی است که دو نقطه از این خط‌ها را به دست آوریم.



ج)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & -1 \le x \le 1 \\ x - 1 & 1 \le x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \le x \le 1 \\ 2 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} & -1 \le x \le 1 \\ x + 1 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

د) روشن است که رسم نمودار این تابع همانی است که در بالا رسم کرده‌ایم.

در قسمت بعد به مفهوم ترکیب توابع پرداخته می‌شود و ابتدا در یک فعالیت تجربه‌ای از این مفهوم ایجاد می‌شود.

حل فعالیت ۷ (صفحه ۷۱)

.۱

t (زمان)	۱	۲	۳	٤	۵	t
r (شعاع دایره در لحظه t)	۲	٤	٦	۸	۱۰	$r(t)=2t$
A (مساحت دایره در لحظه t)	4π	16π	36π	64π	100π	$A(r(t))=\pi(2t)^2=4\pi t^2$

.۳ ابتدا شعاع دایره در لحظه t به صورت $r(t)=2t$ محاسبه می‌شود و سپس با استفاده از تابع مساحت بر حسب r ($A(r)=\pi r^2$) مقدار مساحت در لحظه t به صورت $A(r(t))=\pi(2t)^2=4\pi t^2$ به دست می‌آید.

پس از این فعالیت مفهوم ترکیب توابع در یک مثال از طریق نمودار ون بیشتر توضیح داده می‌شود و نهایتا این مفهوم رسما بیان می‌شود. سپس در مثال‌های بیشتری این مفهوم و نکات آن بررسی می‌شود.

حل تمرین در کلاس (صفحه ۷۵)

.۱
$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+5)=(x+5)^2$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2+5$$

دامنه این توابع تمام $\mathbb{R}$ است و مشخص است که دو تابع متفاوتند.

.۲ دامنه تابع g بازه $[-\sqrt{7}\,,\,\sqrt{7}]$ است پس باید داشته باشیم $-\sqrt{7}\le f(x)\le\sqrt{7}$ یعنی $-\sqrt{7}\le x^2\le\sqrt{7}$ و این معادل با آن است که $|x|\le\sqrt[4]{7}$. پس دامنه $g\circ f$ بازه $[-\sqrt[4]{7}\,,\,\sqrt[4]{7}]$ است و $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=\sqrt{7-x^4}$.

حل مسائل صفحه (۷۵)

۱– دامنه f نقطه $\frac{7}{3}$ را ندارد و دامنه g نقطه ۳ را ندارد و تابع g در نقطه ۱ صفر می‌شود، پس دامنه $\frac{f}{g}$ برابر است با $\mathbb{R}-\{\frac{7}{3}\,,3\,,1\}$ و

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\frac{5x}{3x-7}}{\frac{x^5-1}{5x-15}}=\frac{5x(5x-15)}{(3x-7)(x^5-1)}$$

مناسب است که تذکر داده شود که اگرچه ضابطه به دست آمده برای $\frac{f}{g}$ به ازای $x = 3$ معنادار است ولی ۳ در دامنه این تابع نیست.

۲- برای نمونه (ج) و (د) حل می‌شود.

ج) دامنه f بازه $[2 , \infty)$ و دامنه g بازه $[-2 , \infty)$ است. پس دامنه توابع $f.g$, $f - g$ بازه $[2 , \infty)$ است و $(f - g)(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}$ و $(fg)(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x+2} = \sqrt{x^2-4}$.

همچنین دامنه $f.f$ نیز بازه $[2 , \infty)$ است و $(ff)(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x-2} = x-2$.

تابع g فقط در ۲- صفر می‌شود، پس دامنه $\frac{f}{g}$ همان بازه $[2 , \infty)$ است و

$$.(\frac{f}{g})(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

تابع f فقط در ۲ صفر می‌شود، پس دامنه $\frac{g}{f}$ بازه $(2,\infty)$ است و

$$.(\frac{g}{f})(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$$

د) دامنه f بازه $[-3 , \infty)$ و دامنه g مجموعه $I\!R - \{0\}$ است. پس دامنه توابع $f.g$, $f - g$ مجموعه $[-3 , \infty) - \{0\}$ است و $(f - g)(x) = \sqrt{x+3} - \frac{2}{x}$ و $.(fg)(x) = \frac{2\sqrt{x+3}}{x}$

همچنین دامنه $f.f$ نیز بازه $[-3 , \infty)$ است و $(ff)(x) = \sqrt{x+3}\sqrt{x+3} = x+3$.

تابع g صفر نمی‌شود، پس دامنه $\frac{f}{g}$ همان مجموعه $[-3 , \infty) - \{0\}$ است و

$$.(\frac{f}{g})(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\frac{2}{x}} = \frac{x\sqrt{x+3}}{2}$$

تابع f فقط در ۳- صفر می‌شود، پس دامنه $\frac{g}{f}$ مجموعه $(-3,\infty) - \{0\}$ است و

$$.(\frac{g}{f})(x) = \frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{x+3}} = \frac{2}{x\sqrt{x+3}}$$

۳- مناسب است که ابتدا ضابطه‌های این دو تابع را بنویسیم.

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & x \le 1 \\ 5x-7 & 1 \le x \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} -2 & x \le -1 \\ -\frac{1}{2}x - 2 & -1 \le x \end{cases}$$

برای نمونه چند حالت را حل می‌کنیم.

ه) $(fg)(\frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3})g(\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-2) = \frac{26}{9}$

و) $(f\circ g)(-\frac{1}{2}) = f(g(-\frac{1}{2})) = f(\frac{1}{4}-2) = f(-\frac{7}{4}) = \frac{7}{4}-1 = \frac{3}{4}$

ح) $(f\circ f)(7) = f(f(7)) = f(5\times 7-7) = f(28) = 5\times 28-7 = 133$

٤- دامنه توابع $g\circ f$, $2f+g$ همان مجموعه A است و مقدارهای این دو تابع باید در نقاط مجموعه A حساب شوند. مثلا

$(2f+g)(3) = 2f(3)+g(3) = 2\times 5+2\times 3 = 16$ و

$(g\circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 10$. پس از این محاسبات داریم:

$$2f+g = \{(1,4)\,,\,(2,10)\,,\,(3,16)\,,(4,22)\}$$
$$g\circ f = \{(1,4)\,,\,(2,6)\,,\,(3,10)\,,(4,14)\}$$

۵- ابتدا دامنه g را مشخص می‌کنیم. باید $0\le x(1-x)$ که نتیجه می‌دهد $0\le x\le 1$. پس دامنه g بازه $[0,1]$ است. نقاط ۱ و ۱- در دامنه f نیستند پس باید $g(x)\neq 1$, $g(x)\neq -1$. به خاطر مثبت بودن مقادیر g خود به خود $g(x)\neq -1$ برقرار است. معادله $g(x)=\sqrt{x(1-x)}=1$ به صورت $x^2-x+1=0$ در می‌آید که جواب ندارد. پس $g(x)\neq 1$ نیز خود به خود برقرار است و دامنه $f\circ g$ همان دامنه g است.

٦- الف) $r=\frac{x}{2}$ ب) $A=\pi r^2$ ج) $A=\pi(\frac{x}{2})^2=\frac{1}{4}\pi x^2$ مساحت بزرگترین دایره‌ای که در یک مربع به ضلع x جا می‌گیرد $\frac{1}{4}\pi x^2$ است.

۷- اشتراک دامنه‌های دو تابع مجموعه $\{-4,0,3\}$ است و داریم:

$$f+g = \{(-4,6)\,,\,(0,2)\,,(3\,,-5)\}$$
$$f-g = \{(-4,20)\,,\,(0,8)\,,(3\,,-5)\}$$
$$fg = \{(-4,-91)\,,\,(0,-15)\,,(3\,,0)\}$$
$$\frac{f}{g} = \{(-4,-\frac{13}{7})\,,\,(0,-\frac{5}{3})\}$$

۸- اگر t نشان‌دهنده تعداد سال‌های گذشته پس از سال ۱۳۸٦ باشد و $y_1(t)$ و $y_2(t)$ به ترتیب نشان دهنده فروش رمان اول و دوم در سال $1386+t$ (بر حسب میلیون تومان) باشند داریم:

$$y_1(t)=27+3t\quad,\quad y_2(t)=12+2t$$

مجموع فروش دو رمان برابر ست با $y(t)=y_1(t)+y_2(t)=5t+39$ و $y(10)=89$.

۹- باید داشته باشیم

$$f(g(x)) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow g(x)^2 + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow$$
$$g(x)^2 + 2g(x) - x^2 + 4x - 3 = 0$$

دربالا $g(x)$ مجهول است و عبارت بالا یک معادله درجه دوم بر حسب $g(x)$ است و داریم

$$g(x) = -1 \pm \sqrt{1-(-x^2+4x-3)} = -1 \pm \sqrt{x^2-4x+4} = -1 \pm \sqrt{(x-2)^2}$$
$$= -1 \pm |x-2|$$

این مسئله حداقل دو جواب $g(x) = -1 + |x-2|$, $g(x) = -1 - |x-2|$ دارد. اما جواب‌های دیگری هم می‌توان برای این مسئله ساخت که می‌توانید برای دانش‌آموزان علاقه‌مند مطرح کنید. اگر A و B دو زیرمجموعه دلخواه $\mathbb{R}$ باشند که $A \cap B = \phi$ و $A \cup B = \mathbb{R}$ تابع زیر نیز یک جواب مسئله است.

$$g(x) = \begin{cases} -1 + |x-2| & x \in A \\ -1 - |x-2| & x \in B \end{cases}$$

۱۰-دامنه f بازه $[-1, 1]$ و دامنه g بازه $[0, \infty)$ است، پس دامنه $f+g$ بازه $[0, 1]$ است. برای آن که x در دامنه $(f+g)\circ f$ باشد باید x در دامنه f باشد و داشته باشیم $0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1$. این شرط خود به خود برقرار است، پس دامنه $(f+g)\circ f$ همان دامنه f یعنی بازه $[-1, 1]$ است.

۱۱- $f(\frac{3}{4}) = \dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$ و $f(f(\frac{3}{4})) = f(\frac{3}{2}) = 2 \times \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

۱۲- الف) نادرست ب) نادرست ج) درست د)نادرست

۱۳- باید داشته باشیم $f(2x+1) = 4x^2 + 4x + 7$. قرار می‌دهیم $2x+1 = z$ پس $x = \frac{z-1}{2}$ در نتیجه:

$$f(z) = 4(\frac{z-1}{2})^2 + 4(\frac{z-1}{2}) + 7 = z^2 + 6$$

۱٤- دامنه f تمام اعداد و دامنه g بازه $[-2, 2]$ است، پس دامنه $f \circ g$ بازه $[-2, 2]$ و دامنه $g \circ f$ آن اعداد حقیقی مانند x است که $-2 \le \sqrt{x^2+5} \le 2$. اما این نامعادله جواب ندارد یعنی $g \circ f$ قابل ساخت نیست.

۱۵- چند نمونه را حساب می‌کنیم.

ج) $f(f(1)) = f(3) = 4$ د) $g(g(1)) = g(6) = 3$ ه) $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4) = 1$

۱٦- $f \circ g = \{(4,5), (2,5), (6,12), (8,2)\}$, $g \circ f = \{(10,4)\}$

ارزیابی یادگیری

دانش‌آموزان باید بتوانند اعمال جبری بین توابع را انجام دهند و توابع جدید را بسازند. همچنین در ترکیب توابع باید بتوانند شرط امکان ترکیب توابع را بررسی کنند و به تغییر در دامنه‌ها به هنگام اعمال جبری و ترکیب توابع توجه کنند و دامنه توابع جدید را تشخیص دهند.

بخش: توابع زوج و فرد و صعودی و نزولی

اهداف بخش

- آشنایی با توابع زوج و فرد و تقارن‌های نمودار آنها
- آشنایی با توابع صعودی و نزولی و چگونگی نمودار آنها

نگاه کلی به بخش

از طریق چند مثال و شکل، مفهوم تقارن بازتابی و تقارن مرکزی یادآوری می‌شود و بیان جبری این مفاهیم به طور جبری در مورد نمودار توابع بیان می‌شود که همان مفاهیم زوج و فرد بودن توابع است.

سپس از طریق نمودار توابع در مورد چگونگی افزایش مقدارهای متغیر و تابع بحث می‌شود و از این بحث مفاهیم توابع صعودی و نزولی استخراج می‌شود.

ورود به مطلب

برای ورود به بحث توابع زوج و فرد می‌توان از مفهوم تقارن بازتابی و مرکزی شکل‌های هندسی و نمودارهای توابع شروع کرد و به صورت طرح سوال به دنبال بیان جبری این مفاهیم هندسی بگردیم و در این فرآیند مفاهیم توابع زوج و فرد را به دست آوریم.

برای ورود به بحث توابع صعودی و نزولی می‌توانیم از مثال‌هایی واقعی شروع کنیم که در آنها متغیر در حال افزایش باشد و مهم باشد رفتار افزایشی یا کاهشی تابع چگونه است. پس از کار روی چنین مثالی می‌توان مفاهیم توابع صعودی و نزولی را مطرح کرد.

فعالیت آموزشی

این بخش با تعریف‌های مستقیم توابع زوج و فرد و بیان وضعیت نمودار آنها آغاز می‌شود و در مثال‌هایی این مفاهیم توضیح داده می‌شوند.

حل تمرین در کلاس (صفحه ۸۱)

۱. (۱) (ب)، (ه)، (و) (۲) (ب) (۳) (و) (٤) (الف)، (ج)، (د)، (ه)

(قسمت (د) بعدا به صورت $\sqrt{1-x^4}$ اصلاح خواهد شد و در نتیجه دامنه آن متقارن و تابع زوج خواهد بود.)

۲. نمودار بالا سمت راست فرد است.

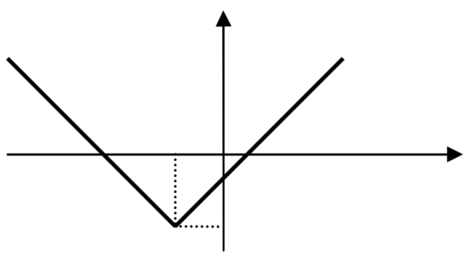
۳. نمودار بالا سمت چپ زوج است. نمودار وسط نه زوج و نه فرد است. نمودار پایین سمت راست زوج است. نمودار پایین سمت چپ فرد است.

در این قسمت یک بحث در کلاس وجود دارد که مربوط به تقارن نمودار تابع نسبت به محور xها است و در وهله اول دانش‌آموزان ممکن است نتیجه بگیرند هیچ تابعی این خاصیت را ندارد. اما با بررسی بیشتر باید به این نتیجه برسید که فقط تابع ثابت صفر با هر دامنه انتخاب شده‌ای این خاصیت را دارد.

در ادامه مفاهیم صعودی و نزولی بودن توابع از طریق توجه به افزایش یا کاهش مقادیر یک تابع مطرح می‌شود و تاثیر آن در نمودار بررسی می‌شود. پس از ارائه تعریف رسمی، در مثال‌هایی این مفاهیم توضیح داده می‌شوند.

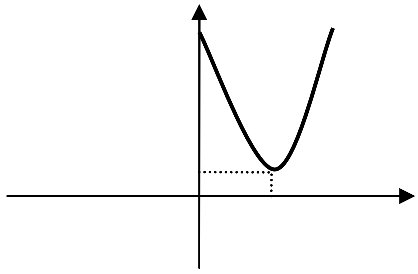
حل تمرین در کلاس (صفحه ۸۴)

الف)



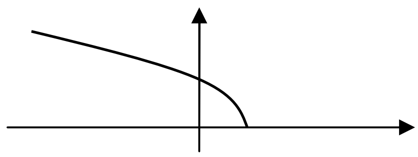
تابع در بازه $(-\infty , -2]$ نزولی و در بازه $[-2 , \infty)$ صعودی است.

ب)



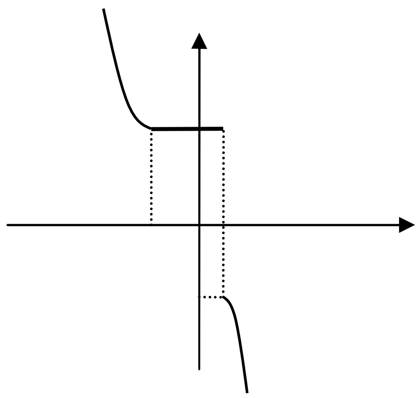
تابع در بازه $(-\infty , 3]$ نزولی و در بازه $[3 , \infty)$ صعودی است.

ج)



تابع روی دامنه خود نزولی است.

د)



تابع در بازه $(-\infty , -2]$ نزولی و در بازه $[-2 , 1]$ ثابت است و در بازه $(1 , \infty)$ مجددا نزولی است.

حل مسائل (صفحه ۸۴)

۱. ضابطه f به صورت $f(x)=|x+1|-1$ است. دامنه تابع، تمام اعداد حقیقی است و متقارن است اما نمودار تابع نه نسبت به محور yها و نه نسبت به مبدا متقارن نیست پس این تابع نه زوج است و نه فرد. از طریق ضابطه داریم $f(-2)=0 \ , \ f(2)=2$ چون $f(-2)\neq f(2)$ این تابع زوج نیست. همچنین داریم $f(-2)\neq -f(2)$ پس این تابع فرد نیست.

ضابطه g به صورت زیر است.

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & -1\leq x<0 \\ x-1 & 0<x\leq 1 \end{cases}$$

دامنه تابع مجموعه $[-1\,,1]-\{0\}$ است و متقارن است و نمودار تابع نسبت به مبدا متقارن است پس این تابع فرد است. از طریق ضابطه برای $0<x\le 1$ داریم

$$g(-x)=-x+1=-(x-1)=-g(x)$$

برای $-1\le x<0$ نیز داریم

$$g(-x)=-x-1=-(x+1)=-g(x)$$

تابع $k(x)$ ثابت است و بدیهی است که نموار آن نسبت به محور yها متقارن است و تابع زوج است. از طریق ضابطه نیز داریم $k(x)=2=k(-x)$.

ضابطه t به صورت $t(x)=2x$ است و دامنه آن بازه $[-1\,,1]$ است که متقارن است. نمودار تابع نسبت به مبدا متقارن است، پس این تابع فرد است. از طریق ضابطه داریم

$$t(-x)=2(-x)=-2x=-t(x)$$

ضابطه h به صورت زیر است.

$$h(x)=\begin{cases} x+\dfrac{17}{4} & -4\le x\le -\dfrac{1}{4} \\ -x+\dfrac{17}{4} & \dfrac{1}{4}\le x\le 4 \end{cases}$$

دامنه تابع مجموعه $[-4\,,-\frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{4}\,,4]$ است و متقارن است و نمودار تابع نسبت به محور yها متقارن است پس این تابع زوج است. از طریق ضابطه برای $-4\le x\le -\frac{1}{4}$ داریم

$$h(-x)=-(-x)+\frac{17}{4}=x+\frac{17}{4}=h(x)$$

برای $\frac{1}{4}\le x\le 4$ نیز داریم

$$h(-x)=(-x)+\frac{17}{4}=-x+\frac{17}{4}=h(x)$$

۲. الف) فرد است. ب)نه زوج است و نه فرد ج)نه زوج است و نه فرد
د)زوج است. ه) فرد است. و) زوج است.

۳. الف) درست ب) درست ج)نادرست د)نادرست

٤. الف) $g(-x)=\dfrac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=g(x)$

ب) $h(-x)=\dfrac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=\dfrac{-f(x)+f(-x)}{2}=-h(x)$

ج) روشن است که $f=g+h$

د) داریم $f(x)=2x^3-10x^2+2\sqrt{1+x^2}-5$ و $2x^3$ تابعی فرد و $-10x^2+2\sqrt{1+x^2}-5$ تابعی زوج است.

۵. چنین تابعی باید ثابت صفر باشد زیرا

$$f(-x)=f(x)\,,\ f(-x)=-f(x)\ \Rightarrow f(-x)=0$$

هر تابع ثابت صفر که دامنه آن متقارن است هم زوج است و هم فرد، و هر چنین تابعی روی دامنه خود ثابت صفر است.

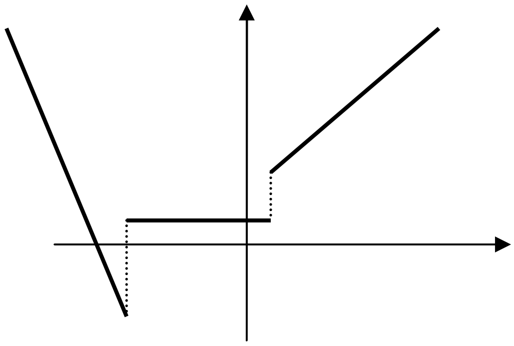
۶. الف) برای تابع زوج $(7,2)$ ، برای تابع فرد $(7,-2)$

ب) برای تابع زوج $(-a,b)$ ، برای تابع فرد $(-a,-b)$

ج) برای تابع زوج $(\frac{2}{7},-7)$ ، برای تابع فرد $(\frac{2}{7},7)$

د) برای تابع زوج $(-5,3)$ ، برای تابع فرد $(-5,-3)$

۷.



این تابع روی بازه $(-\infty\,,-5)$ نزولی و روی بازه $(-5\,,1)$ ثابت و روی بازه $(1\,,\infty)$ صعودی است.

۸. این تابع روی بازه $(-\infty\,,-4)$ نزولی و روی بازه $(-4\,,0)$ صعودی و روی بازه $(0,4)$ ثابت و روی بازه $(4\,,\infty)$ نزولی است.

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2-4 & x\le -2\\ \frac{3}{2}(x+2) & -2\le x\le 0\\ 3 & 0\le x\le 4\\ -\frac{3}{2}(x-6) & 4\le x\end{cases}$$

۹. الف) روی کل دامنه خود صعودی است.

ب) روی بازه‌های $(-\infty\,,0)$ و $(0\,,\infty)$ نزولی است.

ج) روی بازه $(-\infty\,,2)$ صعودی و روی بازه $(2\,,\infty)$ نزولی است.

۱۰. با توجه به آن که $f(x)=-2(x-4)^2-3$ نمودار تابع را رسم کنید. این تابع روی بازه $(-\infty\ ,\ 4)$ صعودی و روی بازه $(4\ ,\ \infty)$ نزولی است.

۱۱. الف) دامنه تابع بازه $(-\infty\ ,\ 6)$ و برد آن بازه $[-3\ ,\ \infty)$ است.

ب) تابع روی بازه $(-\infty\ ,\ \frac{22}{5})$ مثبت و روی بازه $(\frac{22}{5}\ ,\ 6]$ منفی است.

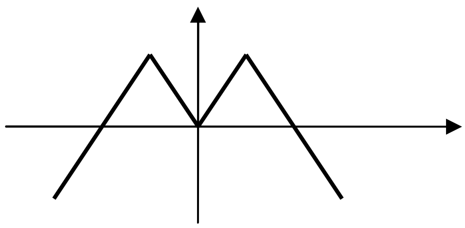
ج) تابع روی بازه $(-\infty\ ,\ 1)$ نزولی و روی بازه $(1\ ,\ 4)$ صعودی و روی بازه $(4\ ,\ 5)$ نزولی و روی بازه $(5\ ,\ 6)$ ثابت است.

د)

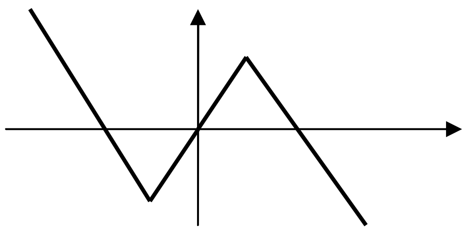
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x\le 1\\ \frac{2}{3}(x-1) & 1\le x\le 4\\ -5x+22 & 4\le x\le 5\\ -3 & 5\le x\le 6\end{cases}$$

ه) $f(-4)=\sqrt{1-(-4)}=\sqrt{5}\ \ ,\ \ f(5/3)=-3\ \ ,\ \ f(\frac{7}{2})=\frac{2}{3}(\frac{7}{2}-1)=\frac{10}{6}$

۱۲. الف)



ب)



۱. دامنه این تابع تمام اعداد حقیقی است و باید داشته باشیم

$$\log(-x+\sqrt{(-x)^2+4a^2})=-\log(x+\sqrt{x^2+4a^2})\quad\Rightarrow$$

$$\log(-x+\sqrt{x^2+4a^2})(x+\sqrt{x^2+4a^2})=0\quad\Rightarrow$$

$$(\sqrt{x^2+4a^2})^2-x^2=1\ \Rightarrow\ 4a^2=1\ \Rightarrow\ a=\pm\frac{1}{2}$$

۲. دامنه f متقارن است و f زوج است. دامنه g متقارن است و g فرد است.

ارزیابی یادگیری

توانایی تشخیص توابع زوج و فرد به طور جبری و هندسی و استفاده از این خاصیت برای رسم توابع ملاک مناسبی برای ارزیابی درک این مفهوم است. همچنین تشخیص صعودی و نزولی بودن یک تابع به طور جبری و هندسی و تشخیص بازه‌هایی که یک تابع روی آنها صعودی یا نزولی است و ساختن توابعی با ویژگی صعودی و نزولی بودن در بازه‌های معین نشان دهنده سطح یادگیری دانش‌آموز خواهد بود.

محدوه مطالب

سطح پیچیدگی مثال‌ها و مسائلی که در این بخش طرح می‌شوند باید رعایت شوند که در درجه اول در سطح کتاب باشند و در حالت‌های خاص متناسب سطح دانش‌آموزان کلاس باشد.

بخش‌های: توابع یک به یک و تابع وارون و محاسبه تابع وارون

اهداف بخش

- آشنایی با ویژگی یک به یک بودن و وارون‌پذیری توابع
- آشنایی با شیوه محاسبه تابع وارون

نگاه کلی به بخش

این بخش با یک فعالیت آغاز می‌شود که هدف آن ایجاد تجربه نسبت به مفاهیم یک به یک بودن توابع و تابع وارون و ارتباط نموداری تابع و تابع وارون و محاسبه تابع وارون است. تمامی این عملیات محتوای اصلی این بخش‌ها می‌باشند.

سپس تابع یک به یک رسما تعریف می‌شود و از لحاظ نموداری توضیح داده می‌شود و ارتباط آن با مفهوم وارون‌پذیری توابع بیان می‌شود. گام اصلی این بخش محاسبه ضابطه تابع وارون

است که ابتدا در یک مثال عملیات مربوط به آن تشریح می‌شود و سپس در حالت کلی روش به دست آمده ارائه می‌شود.

ورود به مطلب

برای ورود به مفهوم تابع وارون مناسب است از یک تابع وارون‌پذیر که به طور طبیعی قابل دیدن است و معنای روشنی دارد و وارون آن نیز قابل دیدن است و معنای روشنی دارد استفاده کنید. با ارائه چنین مثالی و پرسش از معنای آن و دامنه و برد آن به سراغ یافتن وارون آن بروید و دامنه و برد تابع وارون و ضابطه آن و معنای آن را بررسی کنید. در فعالیت اول این بخش نیز تقریبا چنین کاری انجام شده است ولی می‌توان از مثال‌های دیگری هم استفاده کرد.

فعالیت آموزشی

این بخش با فعالیتی شروع می‌شود که هدف از آن ایجاد تجربه عملی در درک تابع وارون و یافتن تابع وارون است.

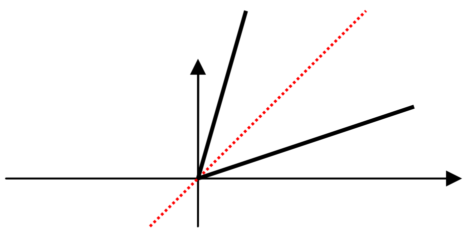
حل فعالیت ۸ (صفحه ۸۷)

۱. $P = 4l$. این تابع یک به یک است و دامنه و برد آن $(0\,,\infty)$ است.

۲. $l = \frac{1}{4}P$

۳. $y_1 = 4x$, $y_2 = \frac{1}{4}x$

۴.



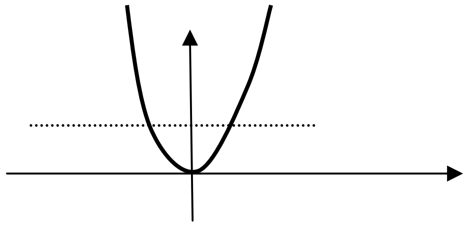
نقطه $(a,4a)$ روی نمودار y_1 است و متناظر آن نقطه $(4a,a)$ روی نمودار y_2 است.

در ادامه به مفهوم تابع یک به یک پرداخته می‌شود و تعریف دقیق آن ارائه می‌شود و در مثال‌هایی توضیح داده می‌شود.

آموزش فصل دوم

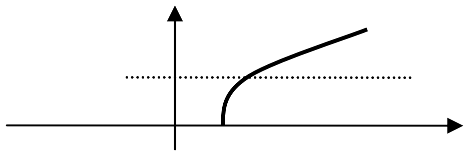
حل تمرین در کلاس (صفحه ۸۹)

الف) f یک به یک نیست زیرا $f(-1)=0=f(1)$ ولی $-1\neq 1$.



ب) g یک به یک است زیرا

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \sqrt{2x_1-3}=\sqrt{2x_2-3}\Rightarrow 2x_1-3=2x_2-3\Rightarrow$$
$$2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$



ج) h یک به یک است زیرا

$$h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow \frac{x_1+6}{3x_1-4}=\frac{x_2+6}{3x_2-4}\Rightarrow (x_1+6)(3x_2-4)=(x_2+6)(3x_1-4)\Rightarrow$$
$$3x_1x_2-4x_1+18x_2-24=3x_1x_2-4x_2+18x_1-24 \Rightarrow 22x_2=22x_1 \Rightarrow x_1=x_2$$

حل تمرین در کلاس (صفحه ۹۰)

۱. الف) بررسی نموداری نشان می‌دهد که تابع یک به یک نیست. به طور جبری نیز می‌توانیم بنویسیم: $f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2-2\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$, $f(\frac{3}{2})=(\frac{3}{2})^2-2\times\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}\neq\frac{3}{2}$

ب) این تابع را می‌توان به صورت $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}$ نوشت که با توجه به دامنه آن یک به یک است.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{2}{{x_1}^2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{{x_2}^2}\Rightarrow {x_1}^2={x_2}^2 \Rightarrow x_1=x_2$$

۲. البته این مسئله جواب یکتا ندارد و دامنه‌های متعددی را برای جواب مسئله می‌توان ارائه کرد. مناسب است که از دانش‌آموزان چند دامنه متفاوت برای جواب مسئله بخواهید.

الف) مثلا $[2,\infty)$ و $(-\infty,2]$ هر کدام جواب هستند و هر زیرمجموعه‌ای از آنها نیز جواب است.

ب) مثلا $[-3, \infty)$ و $(-\infty, -3]$ هر کدام جواب هستند و هر زیرمجموعه‌ای از آنها نیز جواب است.

ج) مثلا $(0, 2\pi)$ یک جواب است و هر بازه دیگری که طول آن از 2π کمتر است نیز جواب است.

د) جواب مانند حالت (ج) است.

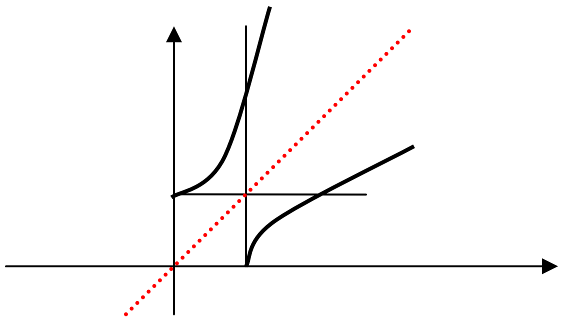
ه) مثلا $[0, \infty)$ و $(-\infty, 0]$ هر کدام جواب هستند و هر زیرمجموعه‌ای از آنها نیز جواب است.

پس از این به یک بحث در کلاس می‌رسیم که هدف از آن بررسی عمیقتر مفهوم تابع وارون و ارتباط بین تابع و تابع وارون است.

در قسمت بعد به مسئله محاسبه ضابطه تابع وارون پرداخته می‌شود.

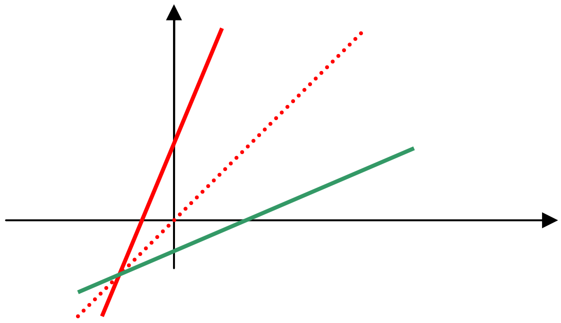
حل تمرین در کلاس (صفحه ۹۱)

توابع بالا سمت راست و پایین سمت چپ یک به یک نیستند و وارون‌پذیر نخواهند بود. تابع پایین سمت راست یک به یک است، پس وارون‌پذیر است و نمودار آن به شکل زیر است.



حل فعالیت ۹ (صفحه ۹۲)

.۱



۳. شیب خطی که تابع وارون خط $f(x)= \quad x+$ است طبق راهنمایی گفته شده برابر $\frac{1-0}{5-3}=\frac{1}{2}$ است و از نقطه $(3,0)$ می‌گذرد. پس این تابع $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$ است.

پس از این فعالیت که به طور غیرمستقیم ضابطه تابع وارون محاسبه شده است به بررسی چگونگی محاسبه تابع وارون در حالت کلی پرداخته می‌شود و روش این عمل ارائه می‌شود.

حل تمرین در کلاس (صفحه ۹۴)

الف) دامنه این تابع بازه $[2\,,\infty)$ و برد آن بازه $[0\,,\infty)$ است.

$$\sqrt{x_1-2}=\sqrt{x_2-2}\Rightarrow x_1-2=x_2-2\Rightarrow x_1=x_2$$

برای محاسبه تابع وارون در معادله $y=\sqrt{x-2}$، x را بر حسب y حل می‌کنیم.

$$y=\sqrt{x-2}\ \Rightarrow\ y^2=x-2\ \Rightarrow\ x=y^2+2$$

پس تابع وارون $g(x)=x^2+2$ است.

ب) دامنه این تابع $\mathbb{R}-\{-\frac{3}{2}\}$ و برد آن $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$ است.

$$\frac{x_1-5}{2x_1+3}=\frac{x_2-5}{2x_2+3}\Rightarrow(x_1-5)(2x_2+3)=(x_2-5)(2x_1+3)\Rightarrow$$

$$2x_1x_2+3x_1-10x_2-15=2x_1x_2+3x_2-10x_1-15\Rightarrow 13x_1=13x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

برای محاسبه تابع وارون در معادله $y=\frac{x-5}{2x+3}$، x را بر حسب y حل می‌کنیم.

$$y=\frac{x-5}{2x+3}\Rightarrow 2xy+3y=x-5\Rightarrow x(2y-1)=-3y-5\Rightarrow x=\frac{5+3y}{1-2y}$$

پس تابع وارون $g(x)=\frac{5+3x}{1-2x}$ است.

حل فعالیت ۱۰ (صفحه ۹۴)

.۱

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\frac{x-3}{2})=2\times\frac{x-3}{2}+3=x$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+3)=\frac{(2x+3)-3}{2}=x$$

۲. $y=\sqrt{2x-1} \Rightarrow y^2=2x-1 \Rightarrow x=\frac{y^2+1}{2} \Rightarrow g(x)=\frac{x^2+1}{2}$. توجه داشته باشید که دامنه f بازه $[\frac{1}{2},\infty)$ و برد آن بازه $[0,\infty)$ است. پس دامنه تابع وارون آن بازه $[0,\infty)$ است و اگرچه ضابطه g به گونه‌ای است که در همه جا تعریف شده است ولی دامنه تابع g فقط بازه $[0,\infty)$ است. توجه کنید که در محاسبات زیر در سطر اول x در بازه $[0,\infty)$ و در سطر دوم x در بازه $[\frac{1}{2},\infty)$ است.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\frac{x^2+1}{2})=\sqrt{2\times\frac{x^2+1}{2}-1}=\sqrt{x^2}=x$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{2x-1})=\frac{(\sqrt{2x-1})^2+1}{2}=\frac{2x-1+1}{2}=x$$

۳. مثال‌های بالا نشان می‌دهند که احتمالا در حالت کلی نیز داریم

$$(g\circ f)(x)=x\ ,\ (f\circ g)(x)=x$$

می‌توان این گونه استدلال کرد که اگر برای یک عدد a در دامنه f داشته باشیم $f(a)=b$ پس برای تابع وارون آن که g نامیده‌ایم داریم $g(b)=a$، پس $g(f(a))=g(b)=a$. چون a دلخواه است نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. استدلال مشابه برای $f(g(x))$ قابل انجام است.

حل تمرین در کلاس (صفحه ۹۵)

۱- دامنه f مجموعه $\mathbb{R}-\{0\}$ و برد آن $\mathbb{R}-\{3\}$ است. دامنه g مجموعه $\mathbb{R}-\{3\}$ و برد آن $\mathbb{R}-\{0\}$ است. همچنین داریم:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\frac{7}{x-3})=\frac{7}{\frac{7}{x-3}}+3=x-3+3=x$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\frac{7}{x}+3)=\frac{7}{\frac{7}{x}+3-3}=\frac{7}{\frac{7}{x}}=x$$

می‌توانیم بگوییم وارون g تابع f است و روشن است که تابع h با تابع f فرق دارد. همچنین می‌توانیم ببینیم

$$g(h(x))=g(\frac{x-3}{7})=\frac{7}{\frac{x-3}{7}-3}=\frac{49}{x-24}\neq x$$

۲- این دو تابع یک به یک نیستند و اصلا وارون‌پذیر نیستند. ولی مقدار ثابت این دو تابع به معنی دو عدد وارون یکدیگرند که ارتباطی با مفهوم تابع وارون ندارد.

۳- با توجه به وضعیت نمودار این دو خط، آنها به عنوان دو تابع وارون یکدیگرند. پس ترکیب آنها تابع همانی است.

$$m_1(m_2x+b_2)+b_1=x \Rightarrow m_1m_2x+m_1b_2+b_1=x \Rightarrow m_1m_2=1$$

در قسمت بعد یک بحث در کلاس قرار دارد که لازم است دانش‌آموزان با بررسی مثال‌ها به این نتیجه برسند که وارون تابع صعودی، تابعی صعودی و وارون تابع نزولی، تابعی نزولی است.

حل مسائل (صفحه ۹۶)

۱. یک راه حل آن است که تابع وارون یکی از آنها را حساب کنیم و مشاهده کنیم تابع وارون همان تابع مورد نظر است. راه دیگر آن است که دامنه و برد این دو تابع را بررسی کنیم که دامنه هر یک برابر برد دیگری است و ترکیب آنها از هر دو طرف تابع همانی است. راه اول را انجام می‌دهیم.

$$y=\frac{1}{x}+2 \Rightarrow \frac{1}{x}=y-2 \Rightarrow x=\frac{1}{y-2}$$

در عبارت $g(f(x))$ مقدارهای x باید در دامنه f باشند، یعنی $x \in \mathbb{R}-\{0\}$. و در عبارت $f(g(x))$ مقدارهای x باید در دامنه g باشند، یعنی $x \in \mathbb{R}-\{2\}$.

۲. با توجه با رابطه نمودار تابع وارون و نمودار خود تابع، نمودار تابع وارون نیز در ربع اول قرار می‌گیرد.

۳. مثلا داریم $f(1)=4=f(3)$ که نشان می‌دهد این تابع یک به یک نیست. اگر دامنه را بازه $(-\infty\,,\,2]$ در نظر بگیریم این تابع جدید یک به یک است و به صورت $f(x)=5-x$ است و وارون آن تابع $g(x)=5-x$ با دامنه $[3\,,\,\infty)$ است.

٤. این مسئله تکراری است و بعدا عوض خواهد شد.

۵. الف) دامنه و برد هر دو تابع تمام اعداد حقیقی است و داریم:

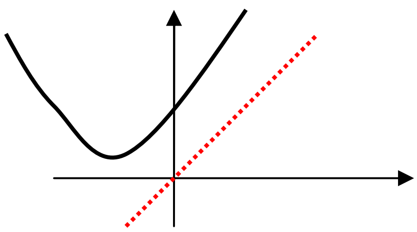
$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt[3]{x+5})=(\sqrt[3]{x+5})^3-5=x+5-5=x$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^3-5)=\sqrt[3]{x^3-5+5}=\sqrt[3]{x^3}=x$$

ب) دامنه تابع $g(x)=x^2+2$ (در چاپ اشکال وجود دارد) بازه $[0\,,\infty)$ در نظر گرفته شده است که برابر برد f است. دامنه f نیز بازه $[2\,,\infty)$ است که برابر برد g است.

همچنین

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+2)=\sqrt{x^2+2-2}=\sqrt{x^2}=x$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-2})=(\sqrt{x-2})^2+2=x-2+2=x$$

٦. این مسئله جواب یکتا ندارد(مسئله پاسخ باز است) و مثلا نمودار زیر یکی از این جواب‌ها است. توجه شود که بررسی پاسخ های نادرست دانش آموزان نیز آموزنده است. این بررسی شواهد مفیدی از درک و برداشت آنان را به کلاس عرضه می‌کند و ایرادات و ابهامات بسیاری از دانش‌آموزان دیگر را بر طرف می‌کند.



۷. الف) این تابع وارون‌پذیر است زیرا یک به یک است. اگر در محاسبه تابع وارون، برای x جواب یکتا بر حسب y به دست آید همین دلیلی برای یک به یک بودن است، اگرنه تابع یک به یک نخواهد بود و وارون‌پذیر نخواهد بود. بنابراین برای بررسی وارون‌پذیری می‌توانیم به سراغ محاسبه تابع وارون برویم و در صورت به دست آوردن جواب یکتا برای x بر حسب y هم وارون‌پذیری ثابت می‌شود و هم تابع وارون به دست می‌آید. در زیر از شرط $-5\le x$ استفاده شده است.

$$y=(x+5)^2\Rightarrow\sqrt{y}=x+5\ \Rightarrow\ x=\sqrt{y}-5\ \Rightarrow\ f^{-1}(x)=\sqrt{x}-5$$

ب) در زیر از شرط $1\le x$ استفاده شده است.

$$y=-|x-1|+1\Rightarrow y=-(x-1)+1\Rightarrow\ \ x=-y+2\ \Rightarrow\ f^{-1}(x)=-x+2$$

ج) $y=(x-3)^2\Rightarrow x-3=\pm\sqrt{y}\ \ \Rightarrow\ x=3\pm\sqrt{y}$ به خاطر نبود جواب یکتا این تابع یک به یک نیست و وارون‌پذیری ندارد.

د)

$$y=\sqrt{x+2}-3\ \Rightarrow\ y+3=\sqrt{x+2}\ \Rightarrow\ (y+3)^2=x+2\ \Rightarrow$$
$$x=(y+3)^2-2\Rightarrow f^{-1}(x)=(x+3)^2-2$$

۸. دامنه و برد این تابع مجموعه $\mathbb{R}-\{\frac{3}{5}\}$ است و

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(\frac{3x-2}{5x-3})=\frac{3\times\frac{3x-2}{5x-3}-2}{5\times\frac{3x-2}{5x-3}-3}=\frac{3(3x-2)-2(5x-3)}{5(3x-2)-3(5x-3)}$$

$$=\frac{9x-6-10x+6}{15x-10-15x+9}=\frac{-x}{-1}=x$$

۹. دامنه و برد این تابع تمام اعداد حقیقی است و باید داشته باشیم $f(f(x))=x$، بنابراین

$$x=f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b\Rightarrow a^2=1\,,\,b(a+1)=0$$

معادلات به دست آمده برای a و b دارای جوابهای $b=0,a=1$ و $a=-1$ و b دلخواه است. به عبارت دیگر جواب‌های مسئله عبارت‌اند از: $y=x$, $y=-x+b$

۱۰. نمودار تابع نشان می‌دهد یک به یک نیست و وارون‌پذیری ندارد. به طور جبری نیز می‌توانیم بنویسیم $f(-1)=3=f(2)$.

۱۱. الف) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-7)=(3x-7)+3=3x-4$ بنابراین

$$(f\circ g)^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x+4)$$

ب) داریم $f^{-1}(x)=x-3$, $g^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x+7)$ بنابراین

$$(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))=g^{-1}(x-3)=\frac{1}{3}(x-3+7)=\frac{1}{3}(x+4)$$

۱۲. الف) برد این تابع ارتفاع‌هایی است که سنگ پیدا می‌کند. این مقادیر در بازه $[0\,,100]$ هستند. دامنه این تابع زمان‌هایی است که سنگ در حال سقوط است. باید زمان برخورد سنگ با زمین را به دست آوریم.

$$h(t)=0\Rightarrow 100-\frac{49}{10}t^2=0\Rightarrow t^2=\frac{1000}{49}\Rightarrow t=\frac{10}{7}\sqrt{10}$$

بنابراین دامنه این تابع بازه $[0\,,\frac{7}{10}\sqrt{10}]$ است.

ب) به خاطر دامنه تعریف، این تابع یک به یک است و معنای آن این است که سنگ در حال سقوط مدام در حال پایین آمدن است و در زمان‌های متفاوت در ارتفاع‌های متفاوت است.

ج) $y=100-\frac{49}{10}t^2\Rightarrow t^2=\frac{10}{49}(100-y)\Rightarrow t=\frac{\sqrt{10(100-y)}}{7}\Rightarrow h^{-1}(y)=\frac{\sqrt{10(100-y)}}{7}$ **د)**

$h^{-1}(y)$ مقدار زمانی را نشان می‌دهد که طول می‌کشد تا سنگ به ارتفاع y برسد. این تابع مقدارهای ارتفاع سنگ را به مقدار زمان رسیدن سنگ به آن ارتفاع تبدیل می‌کند.

ارزیابی یادگیری

دانش‌آموزان باید بتوانند یک به یک بودن و وارون‌پذیری توابع را تشخیص دهند و در حالت‌های ساده ضابطه تابع وارون را به دست آورند. همچنین رابطه بین دامنه و برد تابع و تابع وارون را در هر مثالی تشخیص دهند و از طریق نموداری تشریح کنند.

محدوه مطالب

توجه داشته باشید که یافتن ضابطه تابع وارون در برخی حالات مشکل است و در برخی حالات امکان‌پذیر هم نیست بنابراین در طرح مسائل و مثال‌ها دقت کنید محاسبه تابع وارون امکان‌پذیر باشد و پیچیدگی محاسبه در حد قابل قبول باشد.

نکات مهم

این طور نیست که هر تابعی که مثلا با یک نمودار داده شده باشد حتما فرمولی هم برای آن موجود باشد. اکثر توابع فرمول ندارند و حتی برای برخی توابع وارون‌پذیر که فرمول دارند وارون آنها فرمول ندارد.

بخش‌های: توابع چندجمله‌ای و متناوب و پله‌ای و جزء صحیح

اهداف بخش

- آشنایی با توابع متناوب و چندجمله‌ای
- آشنایی با توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش آشنایی دانش‌آموزان با برخی توابع خاص و دسته‌هایی از توابع مهم است. بنابراین از طریق چند مثال تعریف این توابع ارائه شده است و در مثالهایی این توابع نشان داده شده‌اند.

آموزش فصل دوم

ورود به مطلب

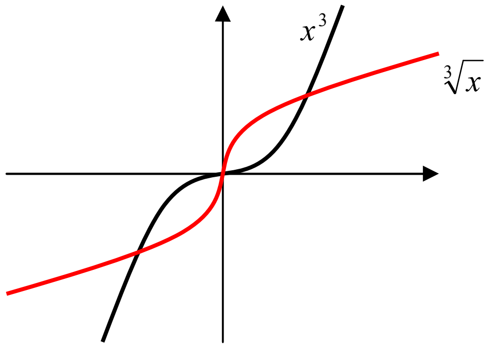
برای ورود به این مفاهیم بهتر است مثال‌های خاص این گونه توابع در زمینه‌های واقعی ارائه شود و سپس به تعریف کلی آنها پرداخته شود.

فعالیت آموزشی

این بخش با تعریف مستقیم توابع چندجمله‌ای آغاز می‌شود.

حل تمرین در کلاس (صفحه ۹۹)

۱- (توابع، $\sqrt[3]{x}$ و x^3 باید باشند)



۲-تابع بالا سمت راست $y=(x-1)^3$، تابع بالا سمت چپ $y=(x+1)^3+1$

تابع پایین سمت راست $y=-(x-1)^3$، تابع پایین سمت چپ $y=-x^3$

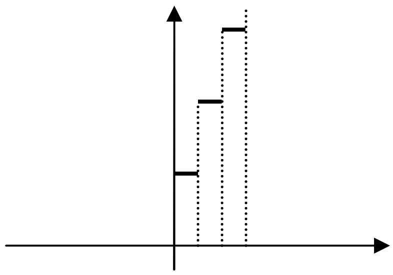
در ادامه تابع متناوب تعریف می‌شود لازم است تعریف دامنه تابع متناوب به صورت زیر اصلاح شود.

$$x \in D_f \Rightarrow x \pm T \in D_f$$

در ادامه توابع پله‌ای به ویژه تابع جزء صحیح در مثال‌هایی توضیح داده می‌شوند.

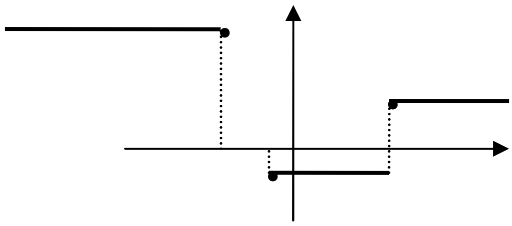
حل تمرین در کلاس (صفحه ۱۰۳)

$0 < x \ , \ y = 5[x+1]$

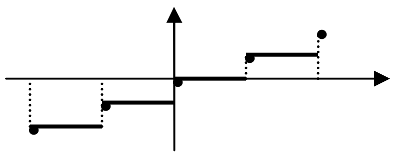


حل مسائل (صفحه ۱۰۳)

۱-

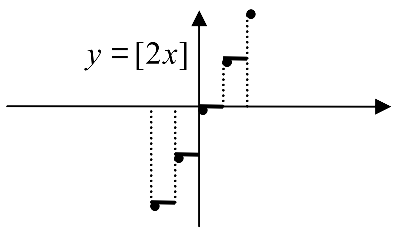


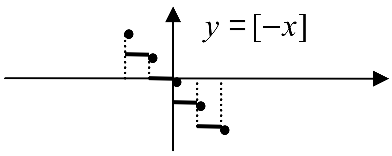
۲-



۳- این تابع یک به یک نیست، پس وارون‌پذیر نیست.

٤-





۵- به ازای هر عدد صحیح m داریم $[x+m]=[x]+m$. زیرا اگر $[x]=p$، p آن عدد صحیح یکتایی است که $p\le x<p+1$. بنابراین $p+m\le x+m<p+m+1$ که نتیجه می‌دهد $[x+m]=p+m=[x]+m$.

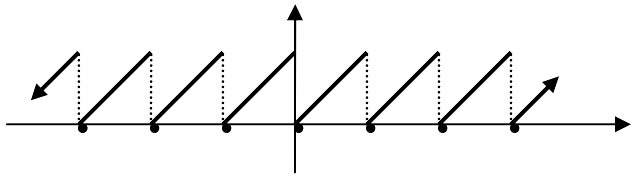
برای هر عدد صحیح m داریم

$$y(x+m)=x+m-[x+m]=x+m-[x]-m=x-[x]=y(x)$$

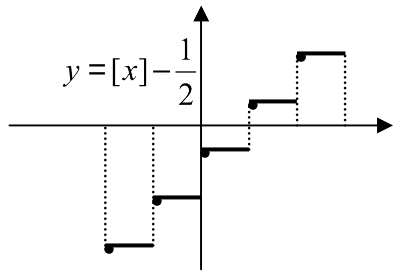
کوچکترین عدد صحیح مثبت عدد ۱ است و ۱ دوره تناوب این تابع است. برای تکمیل بودن اثبات این مدعا باید برای هر عدد $0<\alpha<1$ ثابت کنیم α دوره تناوب نیست. اگر ε عدد مثبتی باشد که $0<\alpha+\varepsilon<1$ داریم

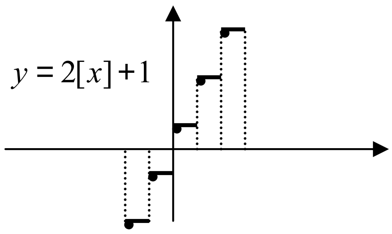
$$y(\varepsilon+\alpha)=\varepsilon+\alpha-[\varepsilon+\alpha]=\varepsilon+\alpha$$
$$y(\varepsilon)=\varepsilon-[\varepsilon]=\varepsilon$$

دیده می‌شود که $y(\varepsilon+\alpha)\neq y(\varepsilon)$ پس α دوره تناوب نیست. در بازه $[0\,,1)$ ضابطه این تابع به صورت $y(x)=x$ است.



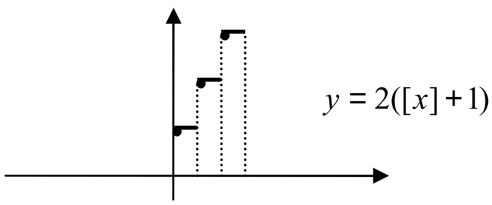
٦-





٧- نمودار این دو تابع را با انتقال افقی نمودار $[x]$ به اندازه ٣ واحد به جلو و انتقال عمودی نمودار $[x]$ به اندازه ٣ واحد به پایین رسم می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که این دو نمودار بر هم منطبق می‌شوند و نتیجه می‌گیریم $[x-3]=[x]-3$.

٨- می‌توانیم این تابع را به صورت $f(x)=2([x]+1)$ در نظر بگیریم که دامنه تابع $(0\,,\infty)$ است.



ارزیابی یادگیری

دانش‌آموزان باید بتوانند این گونه توابع را شناسایی کنند و از طریق ویژگی‌های خاص آنها مسائل مطرح شده را حل کنند.

مسائل دوره‌ای پایان این فصل را می‌توانید به عنوان مسائل نمونه‌ای این فصل در نظر بگیرید.