فصل پنجم

مشتق توابع

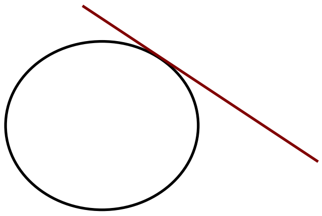
۱. خط مماس بر منحنی ها و مشتق توابع
۲. روشهای محاسبه مشتق توابع
۳. آهنگ تغییرات
۴. مشتق توابع مثلثاتی
۵. مشتق تابع وارون و توابع مرکب

خط مماس بر منحنی ها و مشتق توابع

حل یک مسئله

چگونه خط مماس بر یک منحنی را به دست آوریم؟

قبلا با مفهوم خط مماس بر یک دایره آشنا شده ایم.



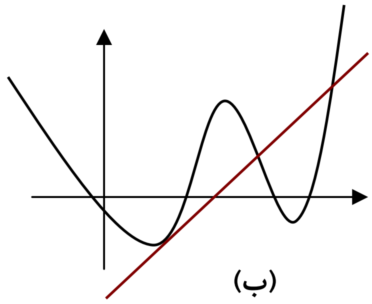
برای آن که خطی در نقطه ای بر دایره ای مماس باشد کافی است یکی از دو ویژگی های زیر برقرار باشد.

الف) خط و دایره فقط و فقط در آن نقطه برخورد داشته باشند.

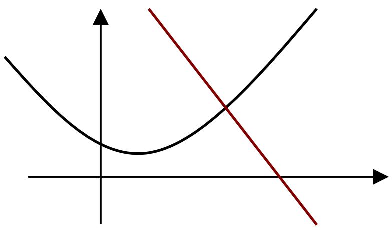
ب) خط و دایره در آن نقطه برخورد داشته باشند و کل دایره در یک طرف خط قرار بگیرد.

آیا از این ویژگی ها می توان برای به دست آوردن خط مماس بر منحنی های دیگر هم استفاده کرد؟

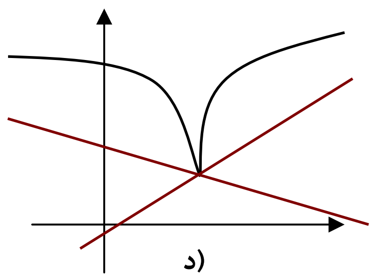
به شکلهای زیر توجه کنید و در هر مورد حدس بزنید که آیا خط داده شده در نقطه تقاطع با منحنی، مماس بر آن منحنی محسوب می شود یا نه، و کدام یک از دو ویژگی بالا را دارد.



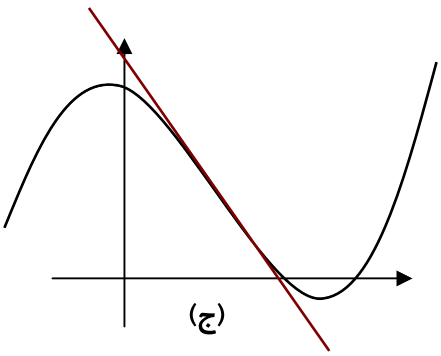
(ب)



(الف)



د)



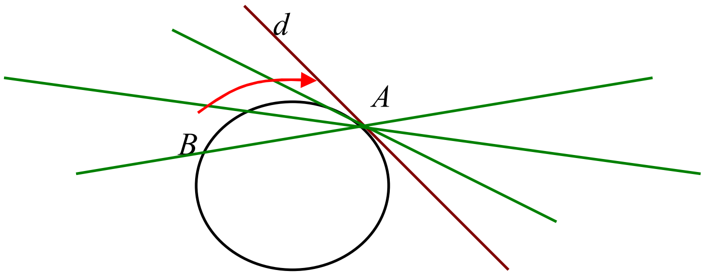
(ج)

در تجربه بالا ممکن است حدسهایی درست یا نادرست زده باشید. اما این تجربه نشان می دهد که شرایط مماس بودن یک خط بر یک منحنی دلخواه با شرایط مماس بودن یک خط بر دایره فرق

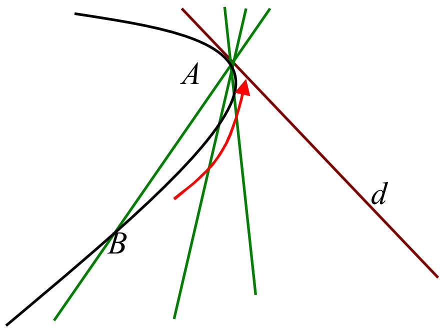
می کند، زیرا دایره منحنی خاصی است و لزومی ندارد برای یک منحنی دلخواه شرایط مماس بودن خط بر منحنی مانند حالت دایره باشد. باید مفهوم خط مماس بر دایره را به شکل دیگری به دست آوریم که برای یک منحنی دلخواه هم قابل قبول باشد.

فعالیت

۱. نقطه A را روی دایره زیر به طور ثابت در نظر بگیرید. نقطه دیگری روی دایره مانند B در نظر بگیرید و خط AB را رسم می کنیم. نقطه B را روی دایره به نقطه A نزدیک می کنیم. خط AB به چه خطی نزدیک می شود؟



۲.در منحنی دلخواه زیر، نقطه ای مانند A به طور ثابت در نظر بگیرید. نقطه دیگری روی منحنی مانند B در نظر بگیرید و خط AB را رسم می کنیم. نقطه B را روی منحنی به نقطه A نزدیک می کنیم. خط AB به چه خطی نزدیک می شود؟



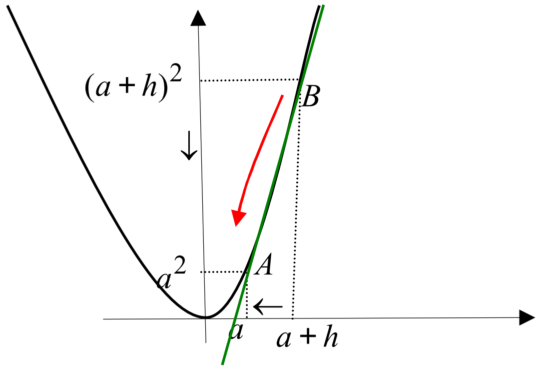
فعالیت بالا نشان می دهد که برای یافتن خط مماس بر یک منحنی در نقطه ای مانند A باید نقطه ای مانند B روی منحنی در نزدیکی A در نظر بگیریم و با رسم خط AB، نقطه B را به نقطه A نزدیک کنیم و ببینیم که آیا این خطها به خط خاصی نزدیک می شوند. این عمل دقیقا یک عمل حدگیری است.

از خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه، یک نقطه از خط مشخص است (همان نقطه ای که خط

در آن نقطه بر منحنی مماس می شود.)، پس برای مشخص کردن این خط، کافی است شیب آن را مشخص کنیم و شیب با یک عمل حدگیری به دست می آید.

فعالیت

روی نمودار تابع $f(x)=x^2$ نقطه ثابت $A(a,a^2)$ را در نظر بگیرید. برای یک عدد حقیقی کوچک و ناصفر h (مثبت یا منفی) نقطه $B(a+h,(a+h)^2)$ را روی نمودار تابع در نزدیکی A در نظر بگیرید.



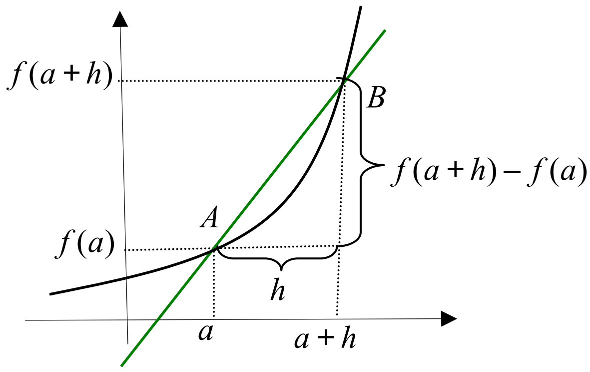
۱. شیب خط AB را حساب کنید که تابعی از h است.

۲. با نزدیک شدن h به صفر نقطه B به چه نقطه ای نزدیک می شود؟

۳. با نزدیک شدن h به صفر شیب خط AB به چه مقداری نزدیک می شود؟

٤. شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^2$ در نقطه $A(a,a^2)$ چقدر است؟

محاسبات فعالیت بالا را در مورد هر تابع دیگری هم می توانیم انجام دهیم. تابع دلخواه $f(x)$ و نقطه ثابت $A(a,f(a))$ را روی نمودار آن در نظر می گیریم. برای یک عدد حقیقی کوچک و ناصفر h (مثبت یا منفی) نقطه $B(a+h,f(a+h))$ را روی نمودار تابع در نزدیکی A در نظر می گیریم.



شکل بالا نشان می دهد که شیب خط AB برابر است با $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

اگر با نزدیک شدن h به صفر این کسر به عدد خاصی نزدیک شود، این عدد همان شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(a,f(a))$ خواهد بود به عبارت دیگر:

$$\text{شیب خط مماس} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مقدار بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در a می نامند و با $f'(a)$ نشان می دهند.

اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه a تعریف شده است، در این صورت حد زیر را (در صورت وجود)، مشتق تابع f در a می نامند و با $f'(a)$ نشان می دهند.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

اگر حد بالا موجود نباشد، گوییم f در a مشتق پذیر نیست.

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^3$ را در نقطه دلخواه a حساب می کنیم و به کمک آن معادله خط مماس بر نمودار تابع را در نقطه $A(1\,,\,1)$ به دست می آوریم.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2) = 3a^2$$

از آنجا که $f'(1)=3$، شیب خط مماس بر نمودر این تابع در نقطه $A(1\,,\,1)$ برابر ۳ می باشد و معادله خط مماس عبارت است از: $y-1=3(x-1)$.

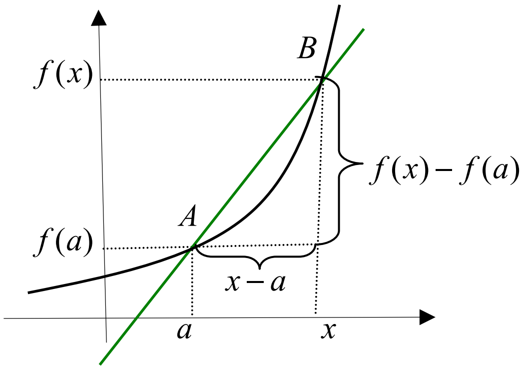
مثال: مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نقطه دلخواه $a\neq 0$ حساب می کنیم و به کمک آن معادله خط مماس بر نمودار تابع را در نقطه $A(2\,,\,\frac{1}{2})$ به دست می آوریم.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$$

از آنجا که $f'(2)=\frac{-1}{4}$، شیب خط مماس بر نمودر این تابع در نقطه $A(2\ ,\ \frac{1}{2})$ برابر $\frac{-1}{4}$ می باشد و معادله خط مماس عبارت است از: $y-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}(x-2)$.

برای محاسبه مشتق یک تابع گاهی مناسبتر است نقطه B نزدیک نقطه $A(a\ ,\ f(a))$ را به صورت $B(x\ ,\ f(x))$ در نظر بگیریم.



در این حالت شیب خط AB برابر است با $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و برای محاسبه مشتق f در a باید حد این کسر را در $x=a$ بیابیم، یعنی

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مثال: مشتق تابع $y(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه $0<a$ حساب می کنیم.

$$y'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

توابعی مانند f که در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیرند را توابعی مشتق پذیر می نامند. تابعی که به هر نقطه(از دامنه f) مشتق f را نظیر می سازد تابع مشتق می نامند و با f' نشان می دهند.

مثال: اگر $f(x)=x^2$ آنگاه تابع مشتق آن به صورت $f'(x)=2x$ است.

برخی توابع در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر نیستند، در این صورت دامنه تابع مشتق فقط از نقاطی تشکیل می شود که تابع در آن نقاط مشتق پذیر باشد.

مثال: تابع $y(x)=\sqrt{x}$ **در** همه نقاط بازه $(0\,,\,\infty)$ مشتق پذیر است و تابع مشتق آن $y'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ است.

تمرین در کلاس

مشتقپذیری و مشتق تابع $f(x)=|x|$ را در همه نقاط بررسی کنید و تابع مشتق آن را به دست آورید.

برای محاسبه مشتق یک تابع در نقطه ای مانند a باید حد کسر زیر را (در صورت وجود) حساب کنیم.

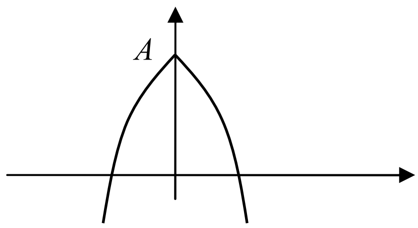
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

در برخی موارد ممکن است حد بالا موجود نباشد ولی حدهای چپ و راست آن موجود باشند.

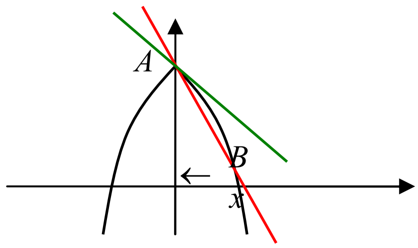
فعالیت

تابع زیر را در نظر بگیرید.

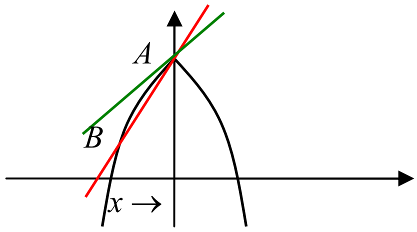
$$y(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+4 & x\le 0\\ -(x+1)^2+4 & 0<x\end{cases}$$



۱. نقطه $A(0\,,\,3)$، و نقطه $B(x\,,\,f(x))$ را سمت راست A در نظر بگیرید و حد شیب خط AB را وقتی B به A نزدیک می شود حساب کنید.



۲. نقطه B را سمت چپ A در نظر بگیرید و حد شیب خط AB را وقتی B به A نزدیک می شود حساب کنید.



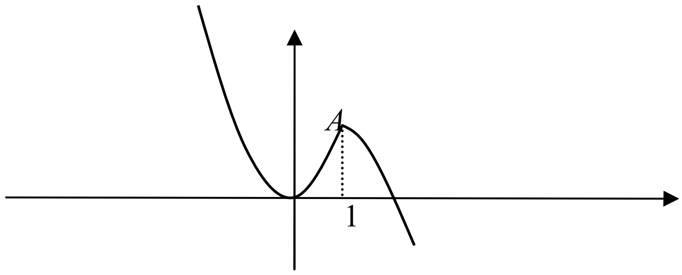
۳. آیا این تابع در $x=0$ مشتقپذیر است؟ خطهایی که از نقطه A می گذرند و شیب آنها اعدادی است که در بندهای قبل به دست آورده اید چه وضعیتی نسبت به نمودار تابع دارند؟

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد، حد راست $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در $x=a$ را (در صورت وجود) مشتق راست f در a می نامند و با $f'_+(a)$ نشان می دهند.

به طور مشابه، اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد، حد چپ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در $x=a$ را (در صورت وجود) مشتق چپ f در a می نامند و با $f'_-(a)$ نشان می دهند.

مشتق پذیری یک تابع در نقطه ای مانند a معادل با آن است که مشتقهای چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و با هم مساویند.

مثال: نمودار تابع $k(x)=\begin{cases} 2x^2 & x\le 1 \\ -x^2+3 & 1<x \end{cases}$ در زیر رسم شده است. پیوستگی و مشتق پذیری آن را در $x=1$ بررسی می کنیم.



از روی شکل می توان حدس زد که تابع در $x=1$ باید پیوسته باشد. برای بررسی درستی این حدس، حد تابع را در $x=1$ بررسی می کنیم. از آنجا که وضعیت تابع در سمت چپ و راست $x=1$ متفاوت است حدهای چپ و راست تابع را در $x=1$ جداگانه حساب می کنیم.

$$\lim_{x\to 1^+} k(x) = \lim_{x\to 1^+} -x^2+3 = -1+3 = 2$$
$$\lim_{x\to 1^-} k(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x^2 = 2$$

دیده می شود که حد تابع $k(x)$ در $x=1$ موجود است و برابر $k(1)$ است، پس تابع $k(x)$ در $x=1$ پیوسته است.

برای بررسی مشتق پذیری، از روی شکل می توان حدس زد نمودار تابع در سمت چپ و راست نقطه $A(1\,,\,2)$ متفاوت است و مماسهای متفاوت دارد. بنابراین مشتقهای چپ و راست تابع $k(x)$ را جداگانه محاسبه می کنیم.

$$k'_+(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{k(x)-k(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+3-2}{x-1}\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}-(x+1) = -2$$

$$k'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{k(x)-k(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-2}{x-1}\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}2(x+1) = 4$$

دیده می شود که مشتقهای چپ و راست تابع $k(x)$ در $x=1$ موجودند ولی مساوی نیستند. بنابراین این تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست و خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه موجود نیست، اگرچه خطهای مماس چپ و راست در این نقطه موجودند.

تمرین در کلاس

۱. مشتق تابع $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ را در نقطه ۱- حساب کنید و به کمک آن، معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه $A(-1,0)$ بنویسید. تابع مشتق g را بیابید و دامنه آن را تعیین کنید.

۲. تابعی بسازید که در $x=2$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتقهای چپ و راست متفاوت داشته باشد.

۳. فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد و به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به صورت $g(x)=f(x-b)$ تعریف می کنیم.

الف) از طریق نموداری نشان دهید که اگر خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه a وجود داشته باشد، آنگاه خط مماس بر نمودار f در نقطه $a-b$ موجود است و این دو خط با هم موازیند.

ب) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر g در نقطه a مشتق پذیر باشد آنگاه f در نقطه $a-b$ مشتق پذیر است و $g'(a)=f'(a-b)$.

ج) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر $f(x)$ در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر باشد، آنگاه $g(x)$ نیز در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر است و برای هر مقدار x (در دامنه g) داریم: $g'(x)=f'(x-b)$.

مثال: مشتق تابع $y(x)=\dfrac{1}{x+b}$ را حساب می کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\dfrac{1}{x}$ داریم $y(x)=f(x+b)$ بنابراین

$$y'(x)=f'(x+b)=-\frac{1}{(x+b)^2}$$

مثال: مشتق تابع $y(x)=\sqrt{x-b}$ را حساب می کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\sqrt{x}$ داریم $y(x)=f(x-b)$. محاسبه نشان می دهد $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ بنابراین

$$y'(x)=f'(x-b)=\frac{1}{2\sqrt{x-b}}$$

شاید این سوال برای شما مطرح شده باشد که مشتق پذیری و پیوستگی چه فرقی با هم دارند. آیا هر تابع پیوسته ای مشتق پذیر است؟ آیا هر تابع مشتق پذیری پیوسته است؟

پیوستگی به معنای مشتق پذیری نیست. در مثالها دیدید که یک تابع ممکن است در نقطه ای پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیر نباشد.

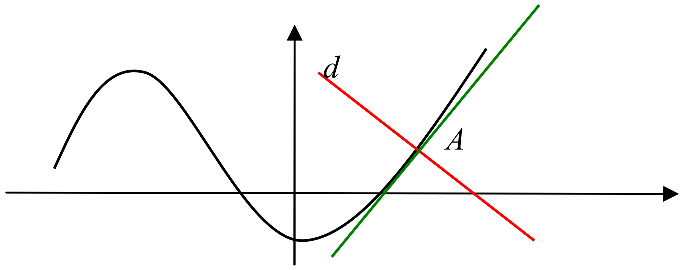
اما از مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه می توان پیوستگی آن تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت. در فصل قبل دیدیم که پیوستگی یک تابع مانند f در نقطه ای مانند a به معنای آن است که $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. این تساوی معادل با آن است که $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$ و ما می توانیم درستی این تساوی را از شرط مشتق پذیری f در a به دست آوریم.

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0=0$$

با این استدلال می توانیم قضیه زیر را به دست آوریم.

اگر تابعی در نقطه ای مشتق پذیر باشد در آن نقطه پیوسته نیز خواهد بود.

فرض کنید خطی مانند d نمودار تابعی مانند f را در نقطه ای مانند $A(a\,,f(a))$ قطع کند.



1

گوییم این خط بر نمودار تابع در نقطه A عمود است، هرگاه d بر خط مماس بر نمودار تابع در A عمود باشد. اگر شیب خط d برابر m باشد، شرط عمود بودن معادل با آن است که $m=-\frac{1}{f'(a)}$.

مثال: معادله خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ که در نقطه $A(2,\frac{1}{2})$ این منحنی را قطع می کند به دست می آوریم.

شیب این خط $-\frac{1}{f'(2)}$ است. از آنجا که $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ داریم $f'(2)=-\frac{1}{4}$، پس شیب خط قائم برابر است با ٤ . نقطه A روی این خط است، بنابراین معادله این خط عبارت است از:

$$y-\frac{1}{2}=4(x-2)$$

مسائل

١. مشتق توابع زیر را در یک نقطه دلخواه a از دامنه ی آنها تعیین کنید.

الف) $f(x)=c$ ب) $g(x)=3x+5$ ج) $x(t)=t^4$

د) $y(u)=\frac{u}{1+u}$ ه) $k(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

٢. معادله خط مماس و خط عمود بر نمودار توابع زیر را در نقطه داده شده به دست آورید.

الف) $x=1\ ,\ y(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ب) $x=-1\ ,\ y(x)=\sqrt{4-x^2}$

۳. نمودار توابع زیر را رسم کنید و حدس بزنید این توابع در چه نقاطی مشتق پذیر نیستند و در این نقاط مشتقهای چپ و راست را در صورت وجود محاسبه کنید.

٤. الف) $y(x)=2|x+1|$ ب) $y(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\le 0 \\ -x^2+1 & 0<x \end{cases}$

ج) $y(x)=|1-x^2|$ د) $y(x)=-|x|+|x-1|$

۵. نمودار تابع $y(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنید. اگر خط $y=2x$ را به موزات خود در صفحه بالا و پایین ببریم آیا جایی پیدا می شود که خط جا به جا شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می افتد؟

٦. فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر در نقطه ای مانند a باشد. به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به صورت $g(x)=f(x)+b$ تعریف می کنیم. از طریق نموداری و وجود خط مماس بر نمودار f در نقطه به طول a نشان دهید g نیز در a مشتق پذیر است و $g'(a)=f'(a)$. از طریق حد گیری و محاسبه نیز درستی این تساوی را به دست آورید.

۷. از مبدا به نقاط مختلف نمودار تابع $f(x)=x^2+1$ خط رسم می کنیم. آیا نقطه یا نقاطی یافت می شوند که خط رسم شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می افتد؟ درستی محاسبات خود را با رسم نمودار این تابع نشان دهید.

۸. فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد و a عددی حقیقی باشد، با محاسبه و حد گیری نشان دهید تابع $g(x)=f(ax)$ نیز مشتق پذیر است و $g'(x)=af'(ax)$.

روشهای محاسبه مشتق توابع

در مثالها و تمرینها صفحات قبل مشتق برخی از توابع را حساب کرده ایم. برای مثال مشتق برخی توابع خاص را در زیر محاسبه می کنیم.

۱. اگر $f(x)=c$ تابع ثابت باشد، مشتق آن در هر نقطه صفر است، یعنی برای هر مقداری از x، $f'(x)=0$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

۲. اگر $f(x)=x^n$ که n عددی طبیعی است، مشتق آن برای هر مقدار x به صورت $f'(x)=nx^{n-1}$ است.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})=a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}=na^{n-1}$$

۳. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ برای هر مقدار مثبت x داریم $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

فعالیت

۱. مشتق دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^2$ را در یک نقطه دلخواه مانند a می شناسید. مشتق تابع $f+g$ را در همین نقطه a حساب کنید.

۲. چه ارتباطی بین $(f+g)'(a)$ و $f'(a)$ و $g'(a)$ مشاهده می کنید.

۳. آیا این ارتباط برای هر دو تابع دیگری هم برقرار است؟

فرض کنید دو تابع f و g در نقطه ای مانند a مشتق پذیر باشند. می خواهیم بررسی کنیم که آیا تابع $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است.

$$(f+g)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)+g(a+h)-g(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=f'(a)+g'(a)$$

محاسبه بالا نشان می دهد که $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است و مشتق آن مجموع مشتقهای f و g است. بنابراین قضیه زیر برقرار است.

> اگر دو تابع f و g در نقطه ای مانند a مشتق پذیر باشند، تابع $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است و $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

مثال: مشتق تابع $y=x^3+\sqrt{x}$ را در یک عدد مثبت x حساب می کنیم.

$$(x^3+\sqrt{x})'=(x^3)'+(\sqrt{x})'=3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: مشتق تابع $y=\frac{x^5+1}{x}$ را در یک عدد ناصفر x حساب می کنیم.

$$(\frac{x^5+1}{x})'=(x^4+\frac{1}{x})'=(x^4)'+(\frac{1}{x})'=4x^3-\frac{1}{x^2}$$

تمرین در کلاس

۱. مشتق تابع $y=\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ را در یک عدد مثبت a حساب کنید.

۲. اگر f تابع مشتق پذیری در نقطه a باشد و c عدد دلخواهی باشد، با محاسبه نشان دهید تابع cf نیز نقطه a مشتق پذیر است و $(cf)'(a)=cf'(a)$.

۳. اگر دو تابع f و g در نقطه ای مانند a مشتق پذیر باشند، نشان دهید تابع $f-g$ نیز در a مشتق پذیر است و $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$.

٤. برای سه تابع f و g و k که همگی در نقطه ای مانند a مشتق پذیرند، نشان دهید $f+g+k$ نیز در a مشتق پذیر است و $(f+g+k)'(a)=f'(a)+g'(a)+k'(a)$. آیا این تساوی برای جمع تعداد بیشتری از توابع نیز درست است؟

دیدیم که اگر دو تابع f و g در نقطه ای مانند a مشتق پذیر باشند، تابع $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است. یک سوال مهم آن است که آیا fg نیز در a مشتق پذیر است و مشق آن چه خواهد بود؟ شاید اولین حدس این باشد که fg در a مشتق پذیر است و $(fg)'(a)=f'(a)g'(a)$. اما نادرستی این حدس را در یک مثال می توانید مشاهده کنید. مثلا برای دو تابع $f(x)=1\ ,\ g(x)=x$ نادرستی آن تساوی را بررسی کنید. برای یافتن مشتق تابع fg در a بهتر است مستقیما آن را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}g(x)+f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\end{aligned}$$

این محاسبه نشان می دهد که قضیه زیر برقرار است.

> اگر دو تابع f و g در نقطه ای مانند a مشتق پذیر باشند، تابع fg نیز در a مشتق پذیر است و $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

مثال: مشتق تابع $x^3\sqrt{x}$ را در یک عدد مثبت x حساب می کنیم.

$$(x^3\sqrt{x})' = (x^3)'\sqrt{x} + x^3(\sqrt{x})' = 3x^2\sqrt{x} + x^3\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: مشتق تابع $\frac{1}{x^2}$ را در یک عدد ناصفر x حساب می کنیم.

$$(\frac{1}{x^2})' = (\frac{1}{x}\times\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2}\times\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\times\frac{-1}{x^2} = \frac{-2}{x^3}$$

تمرین در کلاس

۱. اگر $f(x)$ تابع مشتق پذیری باشد، با استفاده از فرمول مشتق حاصلضرب دو تابع نشان دهید $(f(x)^2)' = 2f(x)f'(x)$. در حالت کلی تر(با استقرا) برای یک عدد طبیعی n نشان دهید:

$$(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f'(x)$$

۲. اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع مشتق پذیری باشند و بتوانیم تابع $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ را تشکیل دهیم داریم $k(x)g(x) = f(x)$. با فرض آن که می دانیم $k(x)$ تابعی مشتق پذیر است، با استفاده از فرمول مشتق حاصلضرب دو تابع نشان دهید:

$$k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ را در یک مقدار دلخواه $x \neq 1$ حساب می کنیم.

$$f'(x)=\frac{(x^2)'(x-1)-(x-1)'x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

مثال: تابع مشتق تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ را حساب می کنیم.

$$f'(x)=\frac{(x)'\sqrt{x+1}-(\sqrt{x+1})'x}{\sqrt{x+1}^2}=\frac{\sqrt{x+1}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}x}{x+1}=\frac{2(x+1)-x}{(x+1)\sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{x+2}{(x+1)\sqrt{x+1}}$$

مسائل

۱. مشتق توابع زیر را در یک نقطه دلخواه حساب کنید.

الف) $y=x^4-\frac{1}{x^4}-\sqrt{3}$ ب) $y=(x^3-x^2-1)(x-\sqrt{x}+5)$

ج) $y=(2x+1)(4-3x)(x^2+x+5)$ د) $y=\frac{2}{x^3-1}$ ه) $y=\frac{x}{\sqrt{x}+2}$

۲. نقاطی از نمودار تابع $y(x)=x^3-2x-6$ را معین کنید که مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد. در چند نقطه این اتفاق می افتد؟

۳. نمودار تابع $y(x)=-4x^2+16x+1$ را رسم کنید. به کمک مشتق تابع معین کنید در چه نقاطی از این نمودار، مماس بر منحنی موازی محور xها است. در چند نقطه این اتفاق می افتد؟این نقطه چه ویژگی خاصی دارد؟

٤. نمودار تابع $y=x^2$ را رسم کنید. اگر خط دلخواهی را که موازی محور yها نیست به موازات خود در صفحه بالا و پایین ببریم آیا جایی پیدا می شود که خط جا به جا شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در چند نقطه این اتفاق می افتد؟ جواب را از طریق هندسی حدس بزنید و حدس خود را با محاسبات جبری ثابت کنید. همین مسئله را برای تابع $y(x)=\sqrt{|x|}$ تکرار کنید.

۵. نقطه ای در صفحه بیابید که از آن نقطه دو خط مماس بر سهمی $y=x^2$ بتوان رسم کرد و این خطها بر هم عمود باشند. این مسئله چند جواب دارد؟ مجموعه جوابهای این مسئله را ترسیم کنید.

٦. برای تابع $f(x)=\sqrt[k]{x}=x^{\frac{1}{k}}$ داریم $f^k(x)=x$. با فرض آن که می دانیم $f(x)$ تابعی مشتق پذیر است، با محاسبه مشتق طرفین ثابت کنید $f'(x)=\frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}$.

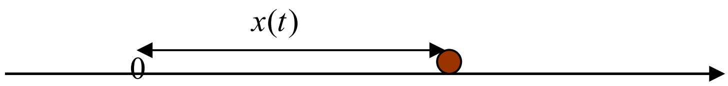
۷. اگر r عددی گویای مثبتی باشد به کمک مسئله قبل نشان دهید تابع $y(x)=x^r$ که روی اعداد مثبت تعریف شده است، مشتق پذیر است و $y'(x)=rx^{r-1}$. سپس درستی این رابطه را برای اعداد گویای منفی هم به دست آورید.

۸. مشتق تابع $y=6\sqrt[3]{x}-3\sqrt[4]{x}$ را حساب کنید.

آهنگ تغییرات

فعالیت

متحرکی روی محور xها طبق ضابطه $x(t)=t^2-t$ حرکت می کند. یعنی متحرک در لحظه t در مکان $x(t)$ قرار دارد. $x(t)$ را تابع حرکت متحرک می نامند.



۱. لحظه t_0 را به طور ثابت در نظر بگیرید. سرعت متوسط متحرک بین دو زمان t_0 و t_0+h (h عددی ناصفر و کوچک) را بنویسید.

۲. با نزدیک کردن h به صفر مقدار بالا به چه عددی نزدیک می شود؟

۳. عدد بالا با مشتق تابع $x(t)$ چه رابطه ای دارد؟

٤. سرعت این متحرک در هر لحظه با مشتق تابع $x(t)$ چه رابطه ای دارد؟

اگر متحرکی روی یک محور طبق تابع حرکت $x(t)$ حرکت کند، سرعت متوسط آن بین دو لحظه t_0 و t_0+h برابر است با

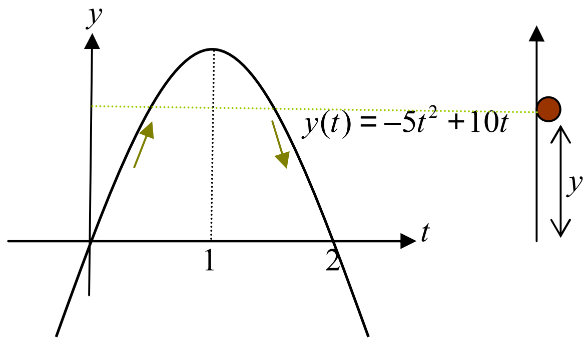
$$\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$$

با نزدیک کردن h به صفر، اگر کسر بالا به عددی نزدیک شود، این عدد همان سرعت لحظه ای متحرک در لحظه t_0 است. از طرف دیگر، این عدد همان حد کسر بالا در $h=0$ است که قبلا آن را مشتق $x(t)$ در t_0 نامیده ایم. بنابراین:

اگر $x(t)$ تابع حرکت متحرکی روی محور باشد،

سرعت آن در هر لحظه t برابر است با $x'(t)$.

مثال: اگر سیبی را در راستای عمودی به بالا پرتاب کنیم، ابتدا رو به بالا حرکت می کند و سپس به زمین باز می گردد. تابع حرکت این سیب می تواند به شکل $y(t)=-5t^2+10t$ باشد. t را بر حسب ثانیه و $y(t)$ را بر حسب متر در نظر بگیرید.



نمودار $y(t)$ نشان می دهد که سیب در لحظه های صفر و ۲ در زمین قراردارد و بین این دو لحظه از زمین به طرف بالا رفته و پس از مدتی به زمین برگشته است. دامنه اعتبار تابع $y(t)$ فاصله $[0 , 2]$ است، زیرا خارج از این فاصله حرکت سیب با این تابع انجام نمی شود.

مشتق $y(t)$ در یک لحظه دلخواه t به صورت $y'(t)=-10t+10$ است. از آنجا که $y'(0)=10$، سرعت سیب در شروع حرکت ۱۰ متر بر ثانیه است. با افزایش t مقدار $y'(t)$ کم می شود تا در لحظه $t=1$ صفر می شود. یعنی سیب در این لحظه یک ایست آنی دارد. این همان لحظه ای است که سیب به بالاترین ارتفاع خود رسیده است.

برای $t>1$، $y'(t)$ منفی می شود که به معنای آن است که سیب رو به پایین در حال حرکت است. از آنجا که $y'(2)=-10$، سرعت سیب در موقع برخورد با زمین همان ۱۰ متر بر ثانیه است ولی جهت حرکت رو به پایین است.

تمرین در کلاس

۱. تابع حرکت متحرکی روی محور xها به صورت $x(t)=1$ است. شیوه حرکت متحرک را توصیف کنید. سرعت حرکت متحرک در هر لحظه چقدر است؟ مشتق $x(t)$ در هر لحظه چقدر است؟

۲. تابع حرکت متحرکی روی محور xها به صورت $x(t)=2t+1$ است. شیوه حرکت متحرک را توصیف کنید. سرعت حرکت متحرک در هر لحظه چقدر است؟ مشتق $x(t)$ در هر لحظه چقدر است؟

۳. تابع حرکت متحرکی روی محور xها در فاصله زمانی $[0 , 4]$ به صورت $x(t)=-t^2+4t+1$

است. با رسم نمودار این تابع، شیوه حرکت متحرک را توصیف کنید. با استفاده از مشتق گیری تعیین کنید سرعت متحرک در هر لحظه چقدر است. متحرک حداکثر چقدر از مبدا فاصله می گیرد؟ سرعت متحرک در نقطه ای که حداکثر فاصله از مبدا را دارد چقدر است؟

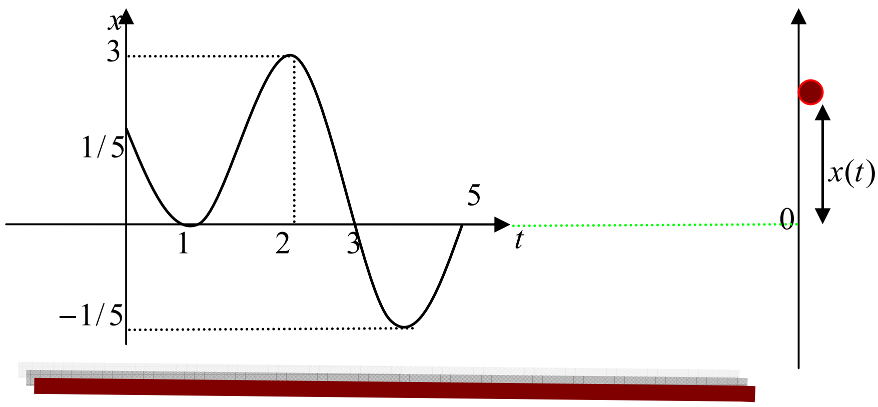
٤. تابع حرکت، متحرکی $x(t)$ است. واحد زمان را ثانیه و واحد مکان را متر در نظر بگیرید.
نمودار $x(t)$ در شکل زیر داده شده است. چگونگی حرکت این متحرک را از لحاظ مدت زمان حرکت و مکانهایی
که رفته است و سرعت آن توصیف کنید.

الف) از چه نقطه ای حرکت شروع شده است و در چه نقطه ای حرکت پایان یافته است؟

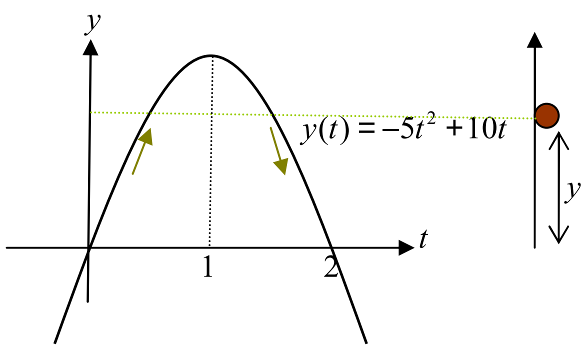
ب) در چه نقاطی سرعت صفر شده است و جهت حرکت تغییر کرده است؟

ج) چندبار از مبدا رد شده است و در چه زمانهایی رد شده است؟

د) حداکثر فاصله آن از مبدا در چه زمانی رخ داده است و این فاصله چقدر بوده است؟



در یکی از مثالها دیدیم که اگر سیبی را در راستای عمودی به بالا پرتاب کنیم، ابتدا رو به بالا حرکت می کند و سپس به زمین باز می گردد. تابع حرکت این سیب را به صورت $y(t)=-5t^2+10t$ در نظر گرفته بودیم که t را بر حسب ثانیه و $y(t)$ را بر حسب متر بوده است.



فعالیت

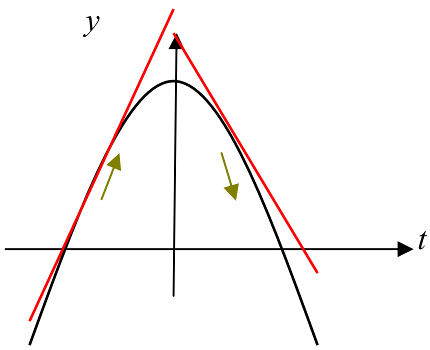
۱. در دو لحظه $t_1=\frac{1}{2}$ و $t_2=\frac{3}{2}$ سیب در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟

۲. سرعت سیب را در این دو لحظه حساب کنید. چرا علامت سرعت در این دو لحظه متفاوت است؟

۳. علامت سرعت با افزایش یا کاهش ارتفاع سیب چه رابطه ای دارد؟

٤. اندازه سرعت در لحظه $t=1$ از بقیه لحظات کمتر است و صفر است و اندازه سرعت در لحظات صفر و ۲ از بقیه لحظات بیشتر است. اندازه سرعت با چگونگی افزایش یا کاهش ارتفاع سیب چه رابطه ای دارد؟

در زیر نمودار تابع $y(x)=4-x^2$ و چند خط مماس بر آن رسم شده است.



مشتق این تابع به صورت $y'(x)=-2x$ است. در xهای منفی مشتق تابع، مثبت است که یعنی شیب خط مماس مثبت است. این نکته نشان دهنده آن است که در این نقاط، تابع در حال افزایش است و صعودی است. البته هر چه به نقطه به طول صفر نزدیک می شویم اندازه مشتق کم می شود که به معنای آن است که میزان افزایش یا صعود تابع کم می شود. در xهای مثبت مشتق تابع، منفی است که یعنی شیب خط مماس منفی است. این نکته نشان دهنده آن است که در این نقاط، تابع در حال کاهش است و نزولی است. هر چه در اعداد مثبت مقدارهای x بزرگتری انتخاب کنیم مشتق تابع همچنان منفی است ولی از لحاظ اندازه بزرگتر می شود. این به معنای آن است میزان کاهش و نزول تابع مرتبا در حال افزایش است.

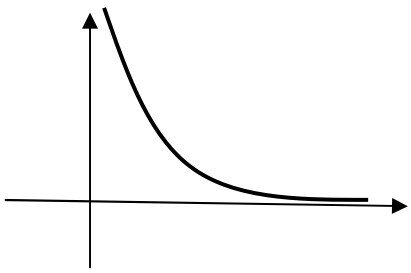
مثبت بودن مشتق یک تابع در یک بازه به معنای آن است که تابع در آن بازه صعودی است و اندازه مشتق در نقاط آن بازه نشان می دهد شدت صعود تابع در آن نقاط چقدر است.

منفی بودن مشتق یک تابع در یک بازه به معنای آن است که تابع در آن بازه نزولی است و اندازه مشتق در نقاط آن بازه نشان می دهد شدت نزول تابع در آن نقاط چقدر است.

مثال: برای تابع $y=\sqrt{x}$ که دامنه آن بازه $[0,\infty)$ است داریم $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. مقدار مشتق مثبت است، پس تابع همواره در حال افزایش است ولی با افزایش x مقدار مشتق کم می شود و این به معنای آن است که شدت افزایش تابع در حال کم شدن است.

نمودار بالا نیز این مطلب را به خوبی نشان می دهد که اگرچه تابع در حال افزایش است اما شدت افزایش در حال کاهش است.

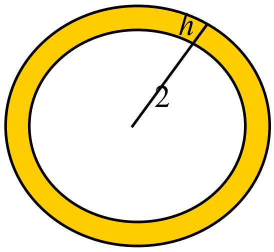
مثال: تابع $y=\frac{1}{x}$ را روی بازه $(0,\infty)$ در نظر می گیریم. مشتق این تابع به صورت $y'=-\frac{1}{x^2}$ است و مقدار آن همواره منفی است. پس این تابع همواره نزولی است. برای xهای نزدیک صفر مقدار مشتق از لحاظ قدر مطلق بسیار بزرگ است، یعنی برای xهای نزدیک صفر تابع به شدت در حال نزول است. ولی برای xهای بزرگ مقدار مشتق منفی و بسیار کوچک می شود، یعنی تابع در حال نزول است ولی بسیار آهسته نزول می کند. نمودار تابع این حقیقت را به خوبی نشان می دهد.



فعالیت

مساحت یک دایره تابعی از شعاع آن است. دایره به شعاع r دارای مساحت $S(r)=\pi r^2$ است.

۱. اگر دایره ای به شعاع ۲ سانتی متر داشته باشیم و شعاع آن را h سانتی متر افزایش دهیم، مساحت آن چقدر افزایش می یابد(بر حسب h به دست می آید)؟



۲. نسبت افزایش مساحت دایره به افزایش شعاع چقدر است؟ این مقدار را آهنگ تغییرات متوسط مساحت دایره بین دو شعاع ۲ و $2+h$ می نامند.

۳. آهنگ تغییرات متوسط مساحت دایره بین دو شعاع ۲ و $2+h$ وقتی h را به صفر نزدیک می کنیم به چه عدی نزدیک می شود؟ این عدد را آهنگ تغییرات مساحت دایره به شعاع آن، در شعاع ۲ سانتی متر می نامند.

٤. آهنگ تغییرات مساحت دایره به شعاع آن، با مشتق $S(r)$ چه رابطه ای دارد؟

اگر کمیتی مانند A تابعی از کمیت دیگری مانند r باشد و این تابع را به صورت $A(r)$ نشان دهیم، یک سوال مهم این است که تغییرات در مقدار r چه مقدار تغییرات در A ایجاد می کند؟ نسبت افزایش مقدار $A(r)$ به افزایش مقدار r چقدر است؟

اگر مقدار کمیت r برابر r_0 باشد و آ ن را h واحد افزایش دهیم، مقدار A از $A(r_0)$ به $A(r_0+h)$ تغییر می کند و نسبت افزایش مقدار A به افزایش مقدار r برابر است با

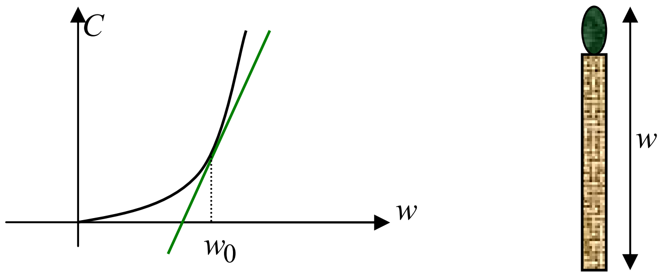
$$\frac{A(r_0+h)-A(r_0)}{h}$$

این کسر را آهنگ تغییرات متوسط کمیت A به کمیت r در دو مقدار r_0 و r_0+h می نامند. حد این کسر در $h=0$ را آهنگ تغییرات کمیت A به کمیت r در $r=r_0$ می نامند که همان مشتق تابع $A(r)$ در r_0 است.

مثال: مساحت هر دایره ای تابعی از محیط آن است. اگر مساحت را با S و محیط را با P نشان

دهیم داریم $S(P)=\frac{1}{4\pi}P^2$. آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به محیط آن برای دایره ای به محیط 3π برابر است با $S'(3\pi)$. از آنجا که $S'(P)=\frac{1}{2\pi}P$، خواهیم داشت $S'(3\pi)=\frac{3}{2}$.

مثال: هزینه ساخت هر برجی تابعی از ارتفاع آن برج است. هزینه را با C و ارتفاع را با w نشان می دهیم و فرض کنید تابع $C(w)$ نموداری به شکل زیر داشته باشد.



آهنگ تغییرات C نسبت به w در ارتفاع w_0 همان شیب خط مماس بر نمودار تابع $C(w)$ در نقطه به طول w_0 است. اندازه این شیب نشان می دهد که برای اضافه کردن یک واحد به ارتفاع برجی که ارتفاع آن w_0 است، تقریبا چقدر باید هزینه شود.

همان طور که دیده می شود برای مقدارهای کم w_0، شیب خط مماس کم است، یعنی هزینه بالا بردن برج از ارتفاعهای پایین زیاد نیست. ولی با زیاد شدن w_0 شیب خط مماس زیاد می شود، یعنی هر چه ارتفاع برج بالاتر می رود هزینه اضافه کردن ارتفاع برج هم بالاتر می رود.

تمرین در کلاس

۱. آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۸ واحد است به دست آورید.

۲. آهنگ تغییرات محیط یک مربع را نسبت به مساحت آن برای مربعی که مساحت آن ٤ واحد است به دست آورید.

۳. آهنگ تغییرات مکان متحرکی که روی یک محور حرکت می کند نسبت به زمان چه معنایی دارد؟

مسائل

۱. محیط هر دایره ای تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره ای به مساحت π حساب کنید.

۲. بادکنکی کروی توسط تلمبه ای در لحظه $t=0$ شروع به باد شدن می کند. هر ثانیه ٤ سانتی متر مکعب هوا وارد بادکنک می شود. حداکثر حجمی که این بادکنک تحمل می کند 4500π سانتی متر مکعب است.

الف) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟

ب) آهنگ تغییرات مساحت سطح بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟

ج) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به سطح بادکنک (در هر مقداری از سطح بادکنک) چقدر است؟

د) در آخرین لحظه که بادکنک می ترکد، آهنگ تغییرات سطح بادکنک نسبت به شعاع بادکنک چقدر است؟

۳. ماشینی که با سرعتی ثابت در حال حرکت است در لحظه $t=0$ ترمز می کند تا این که متوقف می شود. فاصله مکان ماشین از نقطه ای که ترمز گرفته است را با s نشان می دهیم. فرض کنید s (بر حسب متر) به عنوان تابعی از t (بر حسب ثانیه) به صورت $s(t)=25t-\frac{5}{2}t^2$ باشد.

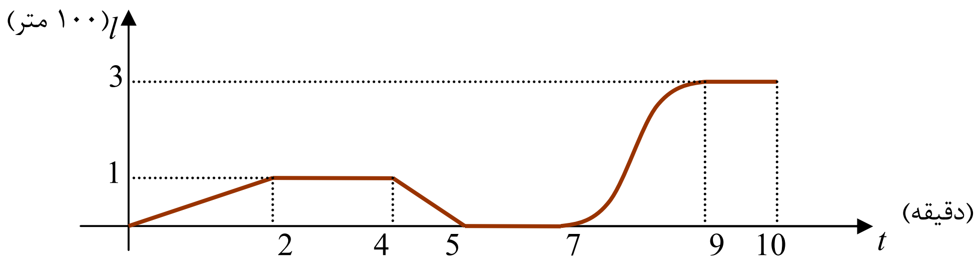
الف) نمودار $s(t)$ را رسم کنید و دامنه اعتبار آن را مشخص کنید.

ب) سرعت ماشین در لحظه شروع ترمز چقدر بوده است؟

ج) سرعت ماشین پس از چند ثانیه صفر می شود؟

د) ماشین از شروع ترمز چند متر را طی می کند تامتوقف شود؟

٤. مدرسه علی در انتهای خیابانی است که خانه علی در آن خیابان است. علی موقع رفتن به مدرسه ممکن است راه برود یا بدود یا برای دیدن مغازه ها بایستد یا به عقب برگردد یا برای به موقع رسیدن سوار ماشین شود. نمودار حرکت یکی از روزهایی که علی به مدرسه رفته است به شکل زیر است. واحد زمان را دقیقه و واحد مکان را ۱۰۰متر در نظر بگیرید.



. با توجه به این نمودار به سوالات زیر پاسخ بگویید.

الف) فاصله مدرسه علی تا خانه او چقدر است و چقدر طول کشیده است تا علی به مدرسه برسد؟

ب) در دو دقیقه اول حرکت سرعت حرکت علی چقدر بوده است؟

ج) در دو دقیقه دوم حرکت احتمالا علی چکار می کرده است؟

د) در دقایق بین ٤ و ٥ علی با چه سرعتی و در چه جهتی حرکت می کرده است؟ در حال دویدن بوده است یا راه رفتن؟

ه) در دقایق بین ٥ و ٧ علی کجا بوده و احتمالا چه می کرده است؟

و) در بین دقایق ٧ و ٩ حدودا سرعت حرکت او چقدر بوده است و احتمالا علی چه عملی انجام داده است؟

ز) بین دقایق ٩ و ١٠ علی کجا بوده است و احتمالا چه می کرده است؟

مشتق توابع مثلثاتی

اگر تابع حرکت متحرکی روی محور xها به صورت $y(t)=\sin t$ باشد، این متحرک یک حرکت تناوبی حول مبدا دارد و مرتبا به جلو و عقب حرکت می کند. سرعت این متحرک نیز حالت تناوبی خواهد داشت و مرتبا در حال افزایش کاهش و تغییر جهت است. برای تشخیص چگونگی سرعت این متحرک باید مشتق تابع $\sin x$ را محاسبه کنیم.

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})=1\times\cos x=\cos x$$

به کمک تساوی $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ می توانیم مشتق تابع $\cos x$ را نیز محاسبه کنیم.

$$(\cos x)'=(\sin(\frac{\pi}{2}-x))'=(-\sin(x-\frac{\pi}{2}))'=-\cos(x-\frac{\pi}{2})=-\sin x$$

تمرین در کلاس

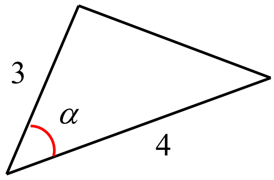
۱. نشان دهید مشتق تابع $\tan x$ در هر نقطه از دامنه اش به شکل زیر است.

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

۲. نشان دهید مشتق تابع $\cot x$ در هر نقطه از دامنه اش به شکل زیر است.

$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

۳. مثلثی ساخته ایم که طول دو ضلع آن ۳ و ٤ است و زاویه بین آنها را مقدار متغیر α قرار می دهیم.



الف)آهنگ تغییرات مساحت این مثلث نسبت به α را در زاویه α_0 به دست آورید.

ب) در کدام زاویه ها آهنگ تغییرات منفی است و معنای آن چیست؟

ج) در کدام زاویه ها آهنگ تغییرات مثبت است و معنای آن چیست؟

د) در کدام زاویه آهنگ تغییرات صفر است و در این زاویه مساحت مثلث به دست آمده چه ویژگی دارد؟

مثال: مشتق تابع $y(x) = \sin x(1 + \cos x)$ را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned} y'(x) &= (\sin x)'(1 + \cos x) + \sin x(1 + \cos x)' \\ &= \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

مثال: مشتق تابع $y(x) = \dfrac{x \sin x}{\sin x + \cos x}$ را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{(x \sin x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)' x \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\sin x + x \cos x)(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x) x \sin x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + x \cos x \sin x + x \cos^2 x - x \cos x \sin x + x \sin^2 x}{1 + \sin 2x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + x}{1 + \sin 2x} \end{aligned}$$

مسائل

۱. مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y(x)=\sin 3x$ ب) $y(x)=x\tan\frac{x}{2}$ ج) $y(x)=\sin^3 2x$

د) $y(x)=\frac{\sin x}{x}$ ه) $y(x)=\frac{\tan x}{1+\tan x}$ و) $y(x)=\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$

۲. مشتق تابع $y=\cos x$ را مستقیما از طریق تعریف به دست آورید.

۳. نمودار تابع $y=\sin x$ با چه زاویه ای از مبدا می گذرد (زاویه خط مماس بر نمودار تابع نسبت به محور xها)؟ نمودار تابع $\tan x$ با چه زاویه ای از مبدا می گذرد؟

٤. در چه نقاطی خط مماس بر نمودار تابع $y(x)=\sin 3x$ موازی محور xها است.

٥. آیا می توان بر نمودار تابع $y(x)=\sin x+\cos x$ خط مماسی رسم کرد که با خط $y=3x-1$ موازی باشد؟

٦. در خط $y=mx+2$ ، m چه مقدارهایی می تواند داشته باشد تا بتوان بر نمودار تابع $y(x)=\tan 3x$ خط مماسی رسم کرد که با آن موازی باشد.

۷. تابع حرکت متحرکی روی محور xها به صورت $x(t)=1+2\sin^2 t$ است. چگونگی حرکت این متحرک را توصیف کنید. در چه نقاطی روی محور xها این متحرک ایست آنی دارد؟ در چه نقاطی این متحرک بیشترین سرعت را دارد و مقدار این سرعت چقدر است؟

مشتق تابع وارون و توابع مرکب

حل یک مسئله

مشتق یک تابع وارونپذیر و وارون آن چه رابطه ای با هم

نمودار یک تابع و وارون آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند، پس مماسهای بر این دو نمودار در نقاط متناظر نیز قرینه هم خواهند بود و شیبهای آنها رابطه مشخصی با هم خواهند یافت. برای یافتن این رابطه در فعالیت زیر در حالتی خاص این رابطه را جستجو می کنیم.

فعالیت

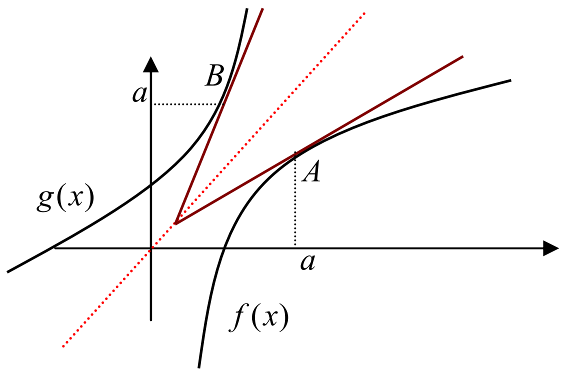
تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ روی دامنه $[1\ ,\ \infty)$ تعریف شده است و صعودی است. وارون $f(x)$ تابع $g(x)=x^2+1$ با دامنه $[0\ ,\ \infty)$ است.

۱. نمودارهای این دو تابع را رسم کنید و نقطه $A(5\ ,\ 1)$ روی نمودار f و نقطه $B(1\ ,\ 5)$ روی نمودار g را مشخص کنید.

۲. وضعیت خطهای مماس بر نمودارهای این دو تابع در این نقاط نسبت به نیمساز ربع اول و سوم چگونه است؟ شیب های این دو خط مماس چه رابطه ای با هم دارند؟

۳. آیا برای نقاط دیگر هم چنین رابطه ای وجود دارد؟ چه حدسی می زنید؟ حدس خود را ثابت کنید.

فرض کنید $f(x)$ تابعی وارون پذیر و مشتق پذیر باشد و وارون آن را با $g(x)$ نشان دهیم. فرض کنید $A(a\ ,\ b)$ نقطه ای از نمودار f باشد ($f(a)=b$)، در این صورت $B(b\ ,\ a)$ نقطه ای از نمودار g خواهد بود که در شکل زیر نمایش داده شده اند.



نمودار g قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است. این نکته باعث می شود خط مماس بر نمودار g در نقطه $B(b\ ,\ a)$ نیز قرینه خط مماس بر نمودار f در نقطه $A(a\ ,\ b)$ شود. در فصل دوم دیدیم که شیبهای این دو خط وارون یکدیگرند. اما شیبهای این دو خط $f'(a)$ و $g'(b)$ هستند، بنابراین

$$g'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(g(b))}$$

این نتیجه نشان می دهد که باید $f'(a) \neq 0$.

اگر $f'(a) = 0$، خط مماس بر نمودار f در نقطه $A(a\ ,\ b)$ موازی محور xها خواهد بود و در نتیجه خط مماس بر نمودار g در نقطه $B(b\ ,\ a)$ موازی محور yها خواهد بود که به معنای آن است که g در b مشتق پذیر نیست. به طور کلی قضیه زیر برقرار است.

اگر f تابعی وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر باشد و وارون آن تابع g باشد، در این صورت g نیز مشتق پذیر است و

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

مثال: تابع $f(x) = x^k$ در دامنه $(0\ ,\ \infty)$ صعودی و وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر است و وارون آن تابع $g(x) = \sqrt[k]{x}$ است. بنابراین

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{kg(x)^{k-1}} = \frac{1}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}}$$

مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر است و وارون آن خودش است.

بنابراین باید داشته باشیم $f'(x) = \frac{1}{f'(f(x))}$. درستی این تساوی را بررسی می کنیم.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad , \quad f'(f(x)) = -\frac{1}{(\frac{1}{x})^2} = -x^2$$

در بسیاری از موارد تابع وارون ممکن است قابل محاسبه نباشد اما مشتق آن را می توانیم با استفاده از این فرمول حساب کنیم.

تمرین در کلاس

۱. $g(x) = \sin^{-1} x$ وارون تابع $f(x) = \sin x$ است که دامنه f را به فاصله $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ محدود کرده ایم. دامنه g فاصله $[-1\ ,\ 1]$ است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای xهای در فاصله $(-1\ ,\ 1)$ داریم:

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

در نقاط $x = \pm 1$ وضعیت مشتق پذیری $\sin^{-1} x$ چگونه است؟

۲. $g(x)=\cos^{-1}x$ وارون تابع $f(x)=\cos x$ است که دامنه f را به فاصله $[0\ ,\ \pi]$ محدود کرده ایم. دامنه g فاصله $[-1\ ,\ 1]$ است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای xهای در فاصله $(-1\ ,1)$ داریم:

$$(\cos^{-1}x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

در نقاط $x=\pm1$ وضعیت مشتق پذیری $\cos^{-1}x$ چگونه است؟

۳. $g(x)=\tan^{-1}x$ وارون تابع $f(x)=\tan x$ است که دامنه f را به فاصله $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$ محدود کرده ایم. دامنه g کل $\mathbb{R}$ است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای هر مقدار x

داریم:

$$(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ را حساب می کنیم.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

صفر شدن مشتق این تابع در همه نقاط به معنای آن است که این تابع، ثابت است. قبلا در فصل سوم دیدیم که

$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=(x+\sin x)\sin^{-1}x$ را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x+\sin x)'\sin^{-1}x+(x+\sin x)(\sin^{-1}x)'\\&=(1+\cos x)\sin^{-1}x+\frac{x+\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

اگر f و g دو تابع صعودی باشند، $f\circ g$ نیز تابعی صعودی است. اگر سرعت صعود g در نقطه ای مانند a برابر m_1 (یعنی، $m_1=g'(a)$) و سرعت صعود f در نقطه $g(a)$ برابر m_2 (یعنی، $m_2=f'(g(a))$) باشد، سرعت صعود $f\circ g$ در نقطه a چه خواهد بود؟ به عبارت دیگر چه رابطه ای بین $g'(a)$ و $f'(g(a))$ و $(f\circ g)'(a)$ وجود دارد؟ برای داشتن یک حدس مناسب بهتر است چند مثال را بررسی کنیم.

فعالیت

۱. برای دو تابع $f(x)=m_1x$ و $g(x)=m_2x$، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f\circ g)'(x)$، بررسی کنید که چه رابطه ای بین آنها وجود دارد.

۲. برای تابع دلخواه $f(x)$ و $g(x)=m_2x$، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f\circ g)'(x)$، بررسی کنید که چه رابطه ای بین آنها وجود دارد.

۳. برای تابع $f(x)=x^3$ و تابع دلخواه $g(x)$ ، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f\circ g)'(x)$، بررسی کنید که چه رابطه ای بین آنها وجود دارد.

تمام مثالهای بالا نشان می دهند که شدت صعود $f\circ g$ در نقطه ای مانند a برابر است با حاصلضرب شدت صعود g در a در شدت صعود f در $g(a)$، به عبارت دیگر:

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))g'(a)$$

درستی این رابطه در حالت کلی قابل اثبات است و قضیه زیر برقرار است.

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، آنگاه $f\circ g$ نیز مشتق پذیر است و

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

مثال: مشتق تابع $\sin x^2$ را حساب می کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x^2$ داریم $\sin x^2=f(g(x))$. بنابراین

$$(\sin x^2)'=f'(g(x))g'(x)=\cos x^2\times 2x=2x\cos x^2$$

مثال: مشتق تابع $\sqrt{1+\sin^2 x}$ را حساب می کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=1+\sin^2 x$ داریم $\sqrt{1+\sin^2 x}=f(g(x))$. بنابراین

$$(\sqrt{1+\sin^2 x})'=f'(g(x))g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\times 2\sin x\cos x=\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

مثال: مشتق تابع $\sin\sqrt{1+x^2}$ را حساب می کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{1+x^2}$ داریم $\sin\sqrt{1+x^2}=f(g(x))$. بنابراین

$$(\sin\sqrt{1+x^2})' = f'(g(x))g'(x) = \cos\sqrt{1+x^2} \times (\sqrt{1+x^2})'$$
$$= \cos\sqrt{1+x^2} \times \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \times 2x = \frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

تمرین در کلاس

۱. مشتق تابع $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ را حساب کنید.

۲. مثلثی ساخته ایم که طول دو ضلع آن ۱ و ۳ می باشد و زاویه بین این دو ضلع α است که قابل تغییر از صفر تا π رادیان است. طول ضلع سوم را l بنامید.

الف) l را بر حسب α و آهنگ تغییرات l نسبت به α را به دست آورید. علامت آهنگ تغیرات چیست و چه معنایی دارد؟

ب) α را بر حسب l و آهنگ تغییرات α نسبت به l را به دست آورید. علامت آهنگ تغیرات چیست و چه معنایی دارد؟

ج) آهنگ تغییرات در (الف) و (ب) چه رابطه ای با هم دارند؟

مسائل

۱. مشتق توابع زیر را حساب کنید و تعیین کنید که در کدام از نقاط دامنه خود مشتق پذیری برقرار نیست.

الف) $y(x)=\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$ ب) $f(t)=\cos\sqrt[3]{t}$ ج) $g(\alpha)=\sqrt[5]{1+\tan\alpha}$

د) $y(\alpha)=\tan^2(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}\alpha)$ ه) $x(t)=\sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}$ و) $k(z)=\sqrt{1+\cos^2\sqrt{1+z^2}}$

۲. آیا تابع $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟ . آیا تابع $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟

۳. دامنه و برد تابع $f(x)=\sin^{-1}(\sin x)$ را تعیین کنید و نشان دهید این تابع متناوب است و نمودار آن را رسم کنید. این تابع در چه نقاطی مشتق ناپذیر است و مشتق آن را در بقیه نقاط تعیین کنید.

٤. تابع $y(x)=\sqrt{1+x^2}$ را در نظر می گیریم و از نقطه $(x\,,\,\sqrt{1+x^2})$ روی نمودار این تابع خط واصل به مبدا را رسم می کنیم. زاویه این خط با محور xها را α می نامیم که تابعی از x است. آهنگ تغییرات α نسبت به x را حساب کنید. مقدارα با افزایش x افزایش می یابد یا کاهش؟

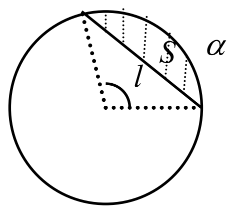
٥. در مثلثی طول دو ضلع آن ۲ و ٤ می باشد و طول ضلع سوم مقدار متغیر l می باشد. زاویه مقابل به این ضلع را با α نشان می دهیم.

الف) l تابعی از α است این تابع را محاسبه کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

ب) تابع وارون تابع قسمت (الف) چه چیزی را نشان می دهد؟

ج) مساحت این مثلث تابعی از l است، این تابع را حساب کنید و آهنگ تغییرات آن را به دست آورید. آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای l مثبت است و معنای آن چیست؟ آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای l منفی است و معنای آن چیست؟ آهنگ تغییرات به ازای چه مقدار l صفر است و مثلث در این مقدار چگونه است و مساحت آن چه ویژگی دارد؟

٦. در شکل زیر وتری از دایره به شعاع واحد به طول l رسم شده است که کمانی به زاویه α را از دایره جدا کرده است. مساحت قسمت هاشور خورده را با S نشان می دهیم.

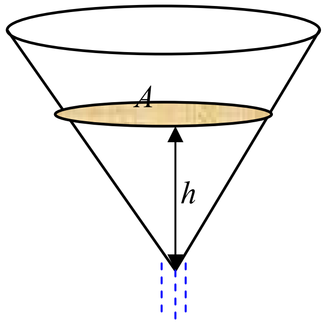


الف) Sرا بر حسب α و α را بر حسب l و Sرا بر حسب l حساب کنید.

ب) آهنگ تغییرات S را نسبت به α و آهنگ تغییرات α را نسبت به l و آهنگ تغییرات S را نسبت به l را حساب کنید.

تمرینات دوره ای

- از نقطه $A(0,1)$ به نقاط مختلف نمودار تابع $y=(x-2)^2$ خط رسم می کنیم. آیا نقطه یا نقاطی یافت می شوند که خط رسم شده بر نمودار این تابع عمود شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می افتد؟ درستی محاسبات خود را با رسم نمودار این تابع نشان دهید.
- قیفی به شکل مخروط دوار داریم که ارتفاع آن ۱۰ سانتی متر و شعاع قاعده آن ۵ سانتی متر است. این قیف را پر از آب می کنیم و در لحظه $t=0$ شیر آن را باز می کنیم و آب با سرعت دو سانتی متر مکعب در ثانیه از آن خارج می شود.



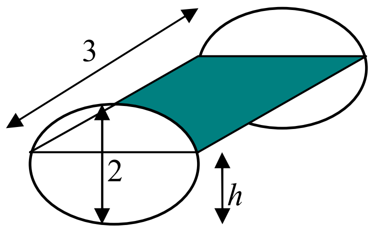
الف) اگر ارتفاع آب باقیمانده در قیف را با h نشان می دهیم، حجم آب باقیمانده را برحسب h به دست آورید.

ب) h را بر حسب زمان به دست آورید و آهنگ تغییرات h را نسبت به زمان در هر لحظه حساب کنید.

ب) سطح آب باقیمانده در قیف را با A نشان می دهیم. با محاسبه A بر حسب زمان، آهنگ تغییرات A را نسبت به زمان در هر لحظه حساب کنید.

ج) با محاسبه A بر حسب h، آهنگ تغییرات A را نسبت به h در هر مقداری از h حساب کنید.

- یک منبع گازوئیل به شکل استوانه در اختیار داریم که به شکل خوابیده روی زمین قرار دارد. قطر دایره قاعده آن ۲متر و ارتفاع آن (که به طور افقی روی زمین است) برابر ۳ متر است.



اگر منبع خالی را به گونه ای پر کنیم که ارتفاع گازوئیل با سرعت ثابت ۳ سانتی متر بر دقیقه افزایش یابد، سرعت افزایش حجم گازوئیل در هر لحظه t چقدر خواهد بود؟