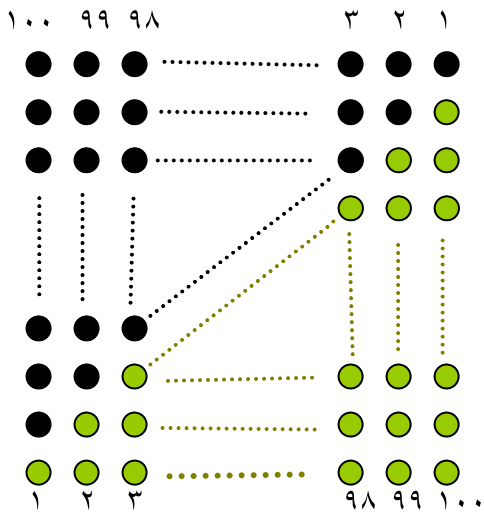
فصل اول

محاسبات جبری و معادلات و نامعادلات

مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

گاوس یکی از دانشمندان ریاضی قرن هیجدهم است که داستان جالبی در زمان مدرسه خود دارد. یک روز معلم برای سرگرم کردن دانش آموزان از آنها می خواهد اعداد ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع بزنند و نتیجه را به دست آورند. در حالی که دانش آموزان مشغول این کار کسل کننده بودند، گاوس نتیجه را به سرعت به دست می آورد و به معلم ارائه می کند.

آیا شما هم می توانید این عمل جمع را به سرعت انجام دهید؟ شکل زیر می تواند ایده ای برای این کار به شما بدهد.



بحث در کلاس

از شکل بالا چگونه می توان استفاده کرد و جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به دست

تمرین در کلاس

۱- با استفاده از تجربیاتی که در بالا به دست آورده اید برای یک عدد طبیعی n نشان دهید:

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

۲- اگر جمله اول یک دنباله حسابی a و قدر نسبت آن d باشد، جملات آن به شکل زیرند:

$$a\,,\,a+d\,,\,a+۲d\,,\cdots,\,a+nd\,,\cdots$$

نشان دهید مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $na+\frac{n(n-۱)}{۲}d$.

۳- نشان دهید $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

بحث در کلاس

می گویند یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه ای بدهد و از او خواست خودش جایزه ای برای خودش تعیین کند. شطرنج ۶۴ خانه دارد و مخترع شطرنج گفت در خانه اول یک دانه گندم بگذارید و در خانه دوم ۲ گندم بگذارید و در خانه سوم ۴ گندم بگذارید و به همین ترتیب در هر خانه دوبرابر خانه قبل گندم بگذارید و نهایتا کل گندمها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم یک گرم باشد، چند کیلو گندم جایزه مخترع شطرنج خواهد شد؟

این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. شما هم سعی کنید راه حلی برای آن بیابید.

حل یک مسئله

طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را رنگ می کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از مرحله قبل را رنگ می زنیم. پس از چند مرحله بیش از ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

آن مقدار از مساحت مربع (بر حسب متر مربع) که در هر مرحله رنگ می شود یک دنباله هندسی به شکل زیر تشکیل می دهد.

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,(\frac{1}{2})^n,\cdots$$

بنابراین آن مقدار از مساحت مربع که پس از n مرحله رنگ می شود برابر است با

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+(\frac{1}{2})^n.$$

$\frac{1}{2}S_n$ شباهت زیادی با S_n دارد. از همین نکته برای محاسبه S_n استفاده می کنیم.

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{2})^{n+1}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{2})^{n+1}=-\frac{1}{2}+S_n+(\frac{1}{2})^{n+1}$$

این تساوی معادله ای بر حسب S_n است و از آن نتیجه می شود، $S_n = ۱-(\frac{۱}{۲})^n$.

حال **باید نامعادله $\frac{۹۹}{۱۰۰} \le ۱-(\frac{۱}{۲})^n$ را حل کنیم.**

$$\frac{۹۹}{۱۰۰} \le ۱-(\frac{۱}{۲})^n \quad \Rightarrow \quad ۹۹ \le ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۲^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{۱۰۰}{۲^n} \le ۱ \quad \Rightarrow \quad ۱۰۰ \le ۲^n$$

حداقل مقدار n که در این نامعادله صدق می کند ۷ می باشد، یعنی پس از مرحله هفتم بیش از ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

فعالیت

۱- برای یک عدد طبیعی n و یک عدد حقیقی q قرار دهید $S = ۱+q+q^۲+\cdots+q^n$. با مقایسه S و qS نتیجه بگیرید:

$$(۱-q)S = ۱-q^{n+۱}$$

۲- اگر $q \ne ۱$ نشان دهید:

$$۱+q+q^۲\cdots+q^n = \frac{۱-q^{n+۱}}{۱-q}$$

۳- اگر جمله اول یک دنباله هندسی برابر a و قدر نسبت آن برابر q باشد، جملات این دنباله به شکل زیرند.

$$a\,,\, aq\,,\, aq^۲\,,\cdots,\, aq^n\,,\cdots$$

نشان دهید در حالت $q \ne ۱$ مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $a\frac{۱-q^n}{۱-q}$

۴- درحالت $|q|<۱$، مجموع n جمله اول دنباله هندسی بالا با افزایش n به چه عددی نزدیک می شود؟

با انجام فعالیت بالا قضیه زیر به دست می آید.

در یک دنباله هندسی با جمله اول a و قدر نسبت q که $|q|<۱$، مجموع تمام جملات آن برابر است با $\frac{a}{۱-q}$.

مثال: توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع اولیه خود بالا می رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کره ایم تا به

ارتفاع ۵ متری برسد. می خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن این توپ چقدر مسافت طی می کند.

ارتفاع توپ قبل از nامین برخوردبا زمین را A_n می نامیم. روشن است که

$$A_۱ = ۵ \ , \ A_۲ = \frac{۵}{۴} \ , \ A_۳ = \frac{۵}{۱۶} \ , \cdots , \ A_n = \frac{۵}{۴^{n-۱}} \ , \cdots$$

بنابراین مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین عبارت است از:

$$۱۰ \ , \ \frac{۱۰}{۴} \ , \ \frac{۱۰}{۱۶} \ , \cdots , \ \frac{۱۰}{۴^{n-۱}} \ , \cdots$$

کل مسافت طی شده توسط توپ برابر است با مجموع جملات دنباله بالا. اما دنباله بالا یک دنباله هندسی با جمله اول ۱۰ و قدر نسبت $\frac{۱}{۴}$ است و مجموع جملات آن برابر است با

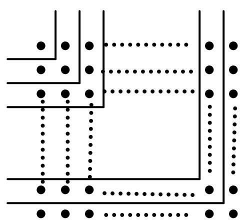
$$\frac{a}{۱-q} = \frac{۱۰}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{۴۰}{۳} \approx ۱۳/۳۳$$

یعنی توپ تقریبا ۱۳/۳۳ متر تا توقف کامل طی می کند.

مسائل

۱- در دنباله حسابی $۵,۸,۱۱,\ldots$ حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

۲- به کمک شکل زیر نتیجه بگیرید $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$.



۳- در مسئله شطرنج نشان دهید جایزه مخترع شطرنج بیش از ۱۰ میلیارد تن گندم خواهد شد.

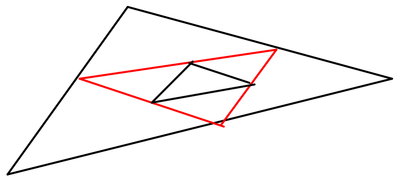
۴- علی می خواهد پولهای خود را پس انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می دهد و قرار می گذارد هر روز ۰/۹ پول روز قبل در صندوق، پول قرار دهد. پس از ۵۰ روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچگاه از ۱۰۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

۵- فرض کنید که در انتشار یک ویروس سرماخوردگی در یک شهر، در طول روز هر فرد مبتلا سه

نفر را بیمار می کند و در پایان همان روز نیمی از مبتلایان سلامتی می یابند. اگر در روز اول ۱ نفر مبتلا باشد، پس از ۲۰ روز چند نفر مبتلا می شوند؟ اگر تعداد جمعیت شهر ۲۰۰۰۰۰۰ نفر باشد پس از چند روز همگان مریض می شوند؟

۶- برای محافظت از تابشهای مضر مواد رادیواکتیو لایه هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابشها پس از عبور از آنها نصف می شود. چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش بیابد؟

۷- یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسطهای اضلاع آن را به هم وصل می کنیم و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجددا روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عملیات را به طور متوالی ادامه دهید.



مجموع محیط مثلثهای به دست آمده چقدر است؟ . مجموع مساحت مثلثهای به دست آمده چقدر است؟

تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

در سالهای پیش دیدیم که با تقسیم یک چندجمله‌ای $P(x)$ بر یک چندجمله‌ای دیگر $B(x)$ یک خارج قسمتِ $Q(x)$ و باقی مانده $R(x)$ به دست می آید که درجه‌ی $R(x)$ از درجه‌ی $B(x)$ کمتر خواهد بود و می توان نوشت:

$$P(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

این تساوی را رابط تقسیم می نامند.

تمرین در کلاس

۱. چندجمله ای $P(x) = 4x^4 + 2x^3 + 1$ را بر چندجمله ای $B(x) = x^2 - 1$ تقسیم کنید.

۲. مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت و باقی مانده را مشخص کنید.

۳. رابطه تقسیم را بنویسید و به کمک آن مقدار $P(1)$ و $P(-1)$ را به دست‌آورید.

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $B(x)$ صفر باشد، نتیجه می شود، $P(x)=B(x)Q(x)$

در این‌حالت گوییم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر است.

مثال: چندجمله ای x^3+1 بر $x+1$ بخش‌پذیر است، زیرا $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$.

فعالیت

فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ تقسیم شده است و باقی‌مانده‌ی آن R باشد.

۱- رابطه تقسیم را بنویسید.

۲- درجه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم چیست؟

۳- $P(a)$ را به دست آورید.

۴- اگر $P(a)$ صفر باشد، چه نتیجه ای می توان گرفت؟

از فعالیت بالا قضیه زیر به دست می آید.

باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله ای $P(x)$ بر $x-a$ همان $P(a)$ است.

بنابراین اگر $P(a)$ صفر باشد، چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)=2x^8-5x^2+x+3$ بر $x+1$ را حساب می کنیم.

$x+1$ را می توانیم به صورت $x-(-1)$ بنویسیم، پس $P(-1)$ را حساب می کنیم.

$$R=P(-1)=2(-1)^8-5(-1)^2+(-1)+3=2-5-1+3=-1$$

بحث در کلاس

باقیمانده تقسیم یک چندجمله ای مانند $P(x)$ بر چندجمله ای $ax+b$ را چگونه می توانیم به دست آوریم؟

تمرین در کلاس

الف) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

۱. عبارت $3x^2-5x+2$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است. ☐

۲. چندجمله ای x^n-a^n بر $x-a$ بخش‌پذیر است. ☐

۳. چندجمله ای x^n+a^n بر $x+a$ بخش‌پذیر است. ☐

۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ برابر است با $P(-b)$. ☐

ب) در چه حالتی چندجمله ای x^n+a^n بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

ج) باقی‌مانده‌ی تقسیم $4x^3-2x+1$ را بر $2x-1$ تعیین کنید.

فعالیت

برای یک عدد حقیقی a و عدد طبیعی n عبارت $S=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}$ را در نظر بگیرید.

۱- عبارت $aS-S$ را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\cdots+a^2+a+1)$$

۲- اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ نتیجه بگیرید:

$$a^n + ۱ = (a+۱)(a^{n-۱} - a^{n-۲} + \cdots - a + ۱)$$

مثال: به کمک اتحادهای بالا عبارت‌های زیر را ساده می کنیم.

$$A = \frac{(x^۵+۱)(x-۱)}{x^۲-۱} \qquad , \qquad B = \frac{(۱-t+t^۲-t^۳+t^۴)(۱+t)}{t^{۱۰}-۱}$$

صورت و مخرج کسر A را تجزیه می‌کنیم.

$$A = \frac{(x+۱)(x^۴-x^۳+x^۲-x+۱)(x-۱)}{(x+۱)(x-۱)} = x^۴ - x^۳ + x^۲ - x + ۱$$

برای ساده کردن B می‌توان نوشت:

$$B = \frac{۱+t^۵}{(t^۵+۱)(t^۵-۱)} = \frac{۱}{t^۵-۱}$$

تمرین در کلاس

به کمک اتحاد $a^n - ۱ = (a-۱)(a^{n-۱} + \cdots + a^۲ + a + ۱)$ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-۱} + x^{n-۲}y + \cdots + xy^{n-۲} + y^{n-۱})$$

بسط دوجمله‌ای غیاث الدین جمشید کاشانی

در سالهای قبل با محاسبه مربع و مکعب دوجمله‌ایها آشنا شدید. در حالت کلی نیز می‌توان توان‌های طبیعی دوجمله‌ایها را به‌دست‌آورد.

فعالیت

به اتحادهای زیر و ضرایبی که در آنها است توجه کنید.

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

....

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱. چه الگویی در توانهای a و b و ضرایب آنها می یابید؟

۲. با توجه به الگوی به دست آمده $(a+b)^6$ برابر چه عبارتی می شود؟

۳. تعداد جملات هر بسط با توان دو جمله ای چه رابطه ای دارد؟

هرعبارت به صورت $(a+b)^n$ را که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است، ***دوجمله‌ای غیاث الدین جمشید کاشانی*** و بسط آن را به صورت چندجمله ای از a و b ***بسط دوجمله‌ای غیاث الدین جمشید کاشانی*** می نامند زیر این دانشمند ایرانی از اولین کسانی بوده است که روی آن کار کرده است. این چندجمله‌ای دارای $n+1$ جمله است و هر جمله ی آن به صورت مضربی از $a^k b^{n-k}$ است و جملات $a^k b^{n-k}$ و $a^{n-k} b^k$ ضریب‌های مساوی دارند.

ضرایب بسط دوجمله‌ای را می‌توان در مثلثی مانند زیر مرتب کرد که به آن مثلث خیام- پاسکال می‌گویند.

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

....

فصل اول - نسخه دوم

مرتب نمودن ضرایب به صورت فوق را ابتدا خیام، دانشمند مشهور ایرانی، و سپس پاسکال انجام داد و به همین خاطر به نام هر دوی آن‌ها خوانده می‌شود.

تمرین در کلاس

۱- اعداد هرسطر در مثلث خیام- پاسکال چگونه از طریق اعداد سطر قبل از آن به‌دست‌می‌آیند؟

۲- چه ارتباطی بین اعداد هر سطر در مثلث فوق با بسط دوجمله‌ای غیاث الدین جمشید کاشانی وجود دارد؟

۳- مجموع ضرایب در هر یک از بسط‌های $(a+b)^۲$، $(a+b)^۳$ و $(a+b)^۴$ را به دست‌آورید. آیا می توانید مجموع ضرایب در بسط $(a+b)^n$ را حدس بزنید؟حدس خود را ثابت کنید.

۳- طرف دوم هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست‌آورید.

$(۲x+y)^۵ =$

$(۳x+۲z)^۴ =$

$(۲a-۱)^۶ =$

مسائل

۱- $P(x)$ یک چندجمله ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. در هر یک از حالتهای زیر $P(x)$ را به گونه ای تعیین کنید که در شرایط مورد نظر صدق کند.

الف) $P(۱)=۰\ ,\ P(۲)=۰$ ب) $P(۰)=۰\ ,\ P(۱)=۱$ ج) $P(-۱)=۲\ ,\ P(۲)=-۱$

۲- مقدار m را چنان بیابید که چندجمله‌ای $P(x)=x^۳-mx^۲-x+۴$ بر $۲x+۱$ بخش‌پذیر باشد.

۳- در چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+x+b$ ، a و b را طوری بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۴ بوده و بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد.

۴- m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای x^4-3x^3+mx+n بر x^2-5x+6 بخش‌پذیر باشد.

۵- نشان دهید عبارت $x-2$ یک فاکتور(عامل) $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ است. سپس معادله‌ی $f(x)=0$ را حل کنید.

۶- a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $x^3-2x^2+ax+2=0$ برابر ۲ باشد. سپس جواب‌های دیگر معادله را به دست آورید.

۷- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $(1-x)^7$ ب) $(1+\frac{2}{x})^6$ ج) $(2x-3y)^4$

۸- فرض کنید $(2+\sqrt{3})^n=362+b\sqrt{3}$، که در آن b یک عدد صحیح و n یک عدد طبیعی است. نشان دهید $(2-\sqrt{3})^n=362-b\sqrt{3}$ و به کمک آن مقدار b را به‌دست‌آورید.

۹- عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$A=x^9-x^3y^3 \qquad , \qquad B=(a^6+1)^2-(a^6-1)^2$$

۱۰- اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، اتحاد زیر را به دست آورید.

$$1-x^n=(1+x)(1-x+\cdots-x^{n-1})$$

بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چندجمله ایها

در دوره‌ی راهنمایی با مفاهیم مقسوم علیه، عدد اول و تعیین بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد آشنا شدیم. مشابه این مفاهیم برای عبارتهای جبری نیز قابل بررسی است. با مروری بر این مفاهیم به تعمیم آن به عبارات جبری می‌پردازیم.

تجزیه عدد: هر عدد طبیعی مخالف یک که اول نباشد یک عدد مرکب است. هر عدد مرکب را می‌توان به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه نمود. در حالتی که در تجزیه اعداد عامل‌های اول

تکراری را به‌صورت توانی بنویسیم به‌آن تجزیه استاندارد می‌گوییم.

برای تجزیه‌ی یک عدد به عامل‌های اول، مرتباً عدد را به عامل‌های اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ... تقسیم می‌کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم سپس آن را به‌صورت تجزیه‌ی استاندارد می‌نویسیم.

مثال: عدد ۳۶۰ را به‌صورت تجزیه‌ی استاندارد می نویسیم.

عدد ۳۶۰ را مطابق الگوی مقابل به طور متوالی بر مقسوم علیه‌های اول آن تقسیم می کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم. در نتیجه ۳۶۰ حاصلضرب اعداد اول سمت راست هستند.

۲	۳۶۰
۲	۱۸۰
۲	۹۰
۳	۴۵
۳	۱۵
۵	۵
	۱

$$۳۶۰ = ۲^{۳} \times ۳^{۲} \times ۵$$

تمرین در کلاس

عددهای ۱۲۰ و ۵۲۵ و ۴۷ را به صورت تجزیه‌ی استاندارد بنویسید.

می دانید که بزرگترین عددی که دو عدد طبیعی a و b بر آن بخشپذیرند بزرگترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد نامیده می شود که به اختصار با ب.م.م. نشان می دهند. برای یافتن ب.م.م. چند عدد می توانیم آنها را به صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، در این صورت حاصلضرب عامل‌های مشترک با کمترین توان، ب.م.م. این اعداد خواهند بود.

مثال: ب.م.م. اعداد ۳۶ و ۲۲۵ و ۴۰۵ را تعیین می کنیم.

هریک از اعداد را به صورت استاندارد تجزیه می‌کنیم. $\begin{cases} ۳۶ = ۲^{۲} \times ۳^{۲} \\ ۲۲۵ = ۳^{۲} \times ۵^{۲} \\ ۴۰۵ = ۳^{۴} \times ۵ \end{cases}$ تنها عامل مشترک عدد ۳ است

و کمترین توان آن ۲ است. پس ب.م.م. $۳^{۲}$ است. روشن است که همه این اعداد بر ب.م.م. خود بخشپذیرند.

تمرین در کلاس

ب. م.م اعداد ۷۸ و ۲۳۴ و ۱۵۶ را به دست آورید.

می دانید که کوچکترین عددی که بر دو عدد طبیعی a و b بخشپذیراست را کوچکترین مضرب مشترک آن دو عدد می نامند که به اختصار با ک.م.م. نشان می دهند. برای یافتن ک.م.م. چند عدد می توانیم آنها را به صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، در این صورت حاصلضرب عامل‌های موجود در این تجزیه ها با بزرگترین توان، ک.م.م. این اعداد خواهند بود.

مثال: ک.م.م. اعداد $a = ۲^۳ \times ۵^۲$ و $b = ۲ \times ۵^۳ \times ۷^۲$ و $c = ۲^۵ \times ۵ \times ۱۳$ را تعیین می کنیم.

حاصل ضرب همه‌ی عامل‌های مشترک و غیرمشترک a، b و c با بیشترین توان را به دست می‌آوریم:

$$۲^۵ \times ۵^۳ \times ۷^۲ \times ۱۳$$

عدد بالا ک.م.م. سه عدد a، b و c است و روشن است که بر a، b و c بخش پذیر است.

تمرین در کلاس

۱. ک.م.م اعداد ۱۵ و ۳۵ و ۱۴۰ را به دست آورید.

۲. می‌خواهیم سالنی به ابعاد ۴۰ و ۳۶ متر را با فرشهای مربع شکل که اندازه‌ی ضلع آن‌ها عدد طبیعی باشد بپوشانیم. اندازه‌ی ضلع فرشها چه عددهایی می‌تواند باشد؟ ضلع فرشها چقدر باشد تا کمترین

تعداد فرش برای پوشاندن سالن مورد نیاز باشد؟

۳. ب.م.م و ک.م.م هر یک از دسته اعداد زیر را تعیین کنید. حروف نشان دهنده اعداد اول متمایزند و مخالف ۲ و ۳ و ۵ هستند.

الف) $۳۲a^۳, ۱۶ab^۲, ۸a^۲b^۳$ **ب)** $۶x^۲y, ۸xy^۲z, ۱۰x^۲y^۲z^۲$

در چندجمله‌ایها نیز، همانند اعداد، اعمال جمع و ضرب و مفهوم بخش پذیری برقرار است. پس می توانیم ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌ها را نیز همانند اعداد تعریف کنیم.

فعالیت

چندجمله ایهای $P(x)=2x^3-16$, $Q(x)=3x^2-12$ را در نظر بگیرید.

۱- $P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه کنید.

۲- بزرگترین چندجمله ای(از لحاظ درجه) که $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند را بنویسید.

۳- کوچکترین چندجمله ای (از لحاظ درجه) که هم بر $P(x)$ و هم بر $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد را بنویسید.

آنچه که در فعالیت بالا انجام دادید یافتن ب.م.م. و یا ک.م.م. دو چندجمله ای بود. بنا به تعریف:

بزرگترین چندجمله ای(از لحاظ درجه) که چندجمله ایهای $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند را بزرگترین مقسوم علیه مشترک (به اختصار ب.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می نامند.

کوچکترین چندجمله ای(از لحاظ درجه) که بر چندجمله ایهای $P(x)$ و $Q(x)$ بخش‌پذیر است را کوچکترین مضرب مشترک (به اختصار ک.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می نامند.

این تعاریف برای بیش از دو چندجمله ای به شکل مشابه انجام می شود.

مثال: ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله ایهای $P(x) = x^۳ + ۱$ و $Q(x) = x^۶ - ۱$ و $R(x) = ۴x^۲ - ۴$ را تعیین می کنیم. برای این کار، ابتدا هر یک از چندجمله ایها را تجزیه می‌کنیم. سپس مشابه آنچه که در مورد ب.م.م و ک.م.م اعداد گفته شد عمل می کنیم.

$$P(x) = (x + ۱)\,(x^۲ - x + ۱)$$
$$Q(x) = (x^۳ + ۱)\,(x^۳ - ۱) = (x + ۱)(x^۲ - x + ۱)(x - ۱)(x^۲ + x + ۱)$$
$$R(x) = ۴(x^۲ - ۱) = ۴(x - ۱)(x + ۱)$$

تنها عامل مشترک در این تجزیه ها $x + ۱$ است و کمترین توان آن ۱ است، پس $x + ۱$ ب.م.م. این سه چندجمله ای است.

عواملی که در این تجزیه های وجود دارند عبارتند از: $x^۲ + x + ۱$, $x^۲ - x + ۱$, $x - ۱$, $x + ۱$, ۴ و بزرگترین توان آنها ۱ است. بنابراین ک.م.م. این سه چندجمله ای عبارت است از:

$$۴(x + ۱)(x^۲ - x + ۱)(x - ۱)(x^۲ + x + ۱) = ۴(x^۳ + ۱)\,(x^۳ - ۱) = ۴(x^۶ - ۱)$$

ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌ها کمک زیادی به کوتاه‌تر شدن و ساده کردن محاسبات در کسرها و جمع و تفریق عبارت‌های گویا می کند.

تمرین در کلاس

۱. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \frac{۱}{۷۲} + \frac{۵}{۴۸} - \frac{۱}{۱۶}$$

۲. کسرهای زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$A = \frac{۳x^۲ - ۳xy}{۳(x - y)^۲} \qquad B = \frac{x^۲ + ۲x + ۱}{x^۲ + ۸x + ۷}$$

۳. حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{a + ۵}{a - ۱} - \frac{۶}{a^۲ + a + ۱} - \frac{۶(a^۲ + ۲)}{a^۳ - ۱}$$

مسائل

۱– سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می شود. اولین زنگ هر ۱۸ دقیقه یک بار، دومین زنگ در هر ۲۴ دقیقه یک بار و سومین زنگ هر ۳۲ دقیقه زنگ یک بار زده می شوند. بعد از اولین بار که هر سه زنگ با هم زده شوند حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آن‌ها دوباره با هم زده شوند؟

۲– در دنباله های حسابی زیر چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

$۴ , ۷ ,. ۱۰ , \dots \qquad\qquad ۱ , ۷ , ۱۳ , \dots$

۳– ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی شده‌اند. حداقل تعداد شیشه‌ها کدام است؟(گنجایش شیشه ها را عدد طبیعی فرض کنید.)

۴– حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

آ) $\dfrac{x^۲-۵x+۴}{x^۲-۴x} \div \dfrac{x^۲+x-۲}{x^۳+۲x^۲}$

ب) $\dfrac{x^۲+۲x-۳}{x^۲-۹} \div \dfrac{x^۲-۶x-۷}{x^۲-۱۰x+۲۱}$

پ) $\dfrac{۱}{a^۲-۱} + \dfrac{۲a}{a^۲+۲a+۱} - \dfrac{۲}{a+۱}$

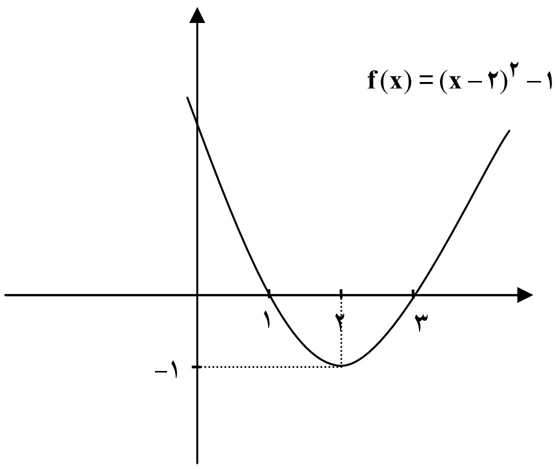
ت) $\dfrac{x+۱}{x-۱} + \dfrac{۱}{x+۳} - \dfrac{۸}{x^۲+۲x-۳}$

معادلات

در سالهای قبل با مفهوم معادله و حل معادله‌ی درجه‌ی اول و درجه‌ی دوم آشنا شدید. در این بخش با برخی نکات جدید در حل معادلات آشنا خواهیم شد و سپس انواع دیگری از معادلات جبری را بررسی خواهیم کرد.

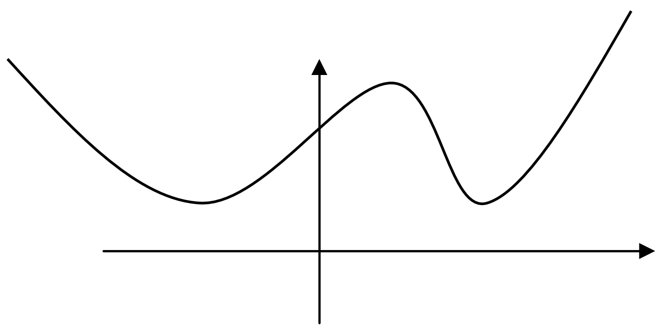
فعالیت

۱. نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۳$ به شکل زیر است.



جوابهای معادله $f(x)=x^{۲}-۴x+۳=۰$ چه ویژگی از نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می کند؟ از طریق نمودار $f(x)$ چگونه می توان در مورد جوابهای معادله $f(x)=۰$ اظهارنظر کرد؟

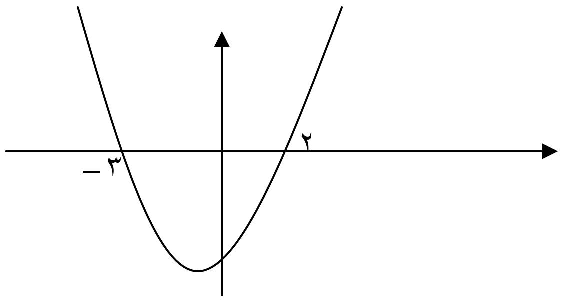
۲- نمودار تابعی مانند $g(x)$ به شکل زیر است. در مورد جوابهای معادله $g(x)=۰$ چه می توانید بگویید؟



۳- با رسم نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۴$ توضیح دهید چرا معادله $x^{۲}-۴x+۴=۰$ فقط یک جواب دارد.

برای یک تابع $f(x)$ جواب‌های معادله‌ی $f(x)=0$ را (در صورت وجود جواب) صفرهای تابع f می‌نامیم. صفرهای تابع f آن مقادیری از x هستند که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می شود. اگر نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم، صفرهای f، طول نقاط تلاقی نمودار با محور طول‌ها است.

مثال: اعداد ۲ و ۳- صفرهای تابع $f(x)=x^2+x-6$ می‌باشند و نمودار f در نقاط به طولهای ۲ و ۳- محور طولها را قطع می کند.



نمودار توابعی که ضابطه آنها یک چندجمله ای درجه دوم است را سهمی می نامند. سهمی ها شکلهای مشابهی دارند و خواص هندسی مشترکی دارند که در درس هندسه با آنها بیشتر آشنا خواهید شد.

در سالهای قبل دیدیم که برای یک معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ که $\Delta=b^2-4ac>0$ دارای دو جواب به شکل زیر است.

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

در حالت $\Delta=0$ داریم $x'=x''=-\frac{b}{2a}$. در این حالت معادله فقط یک جواب دارد و می توان تعبیر کرد که معادله دو جواب مساوی دارد. به همین خاطر در این حالت گوییم معادله یک جواب مضاعف(دو گانه) دارد. سال قبل دیدیم که اگر x' و x'' جواب‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، داریم $x'+x''=\frac{-b}{a}$ و $x'x''=\frac{c}{a}$.

حل یک مسئله

مستطیلی بسازید که محیط آن ۲۲ سانتی متر و مساحت آن ۲۸ سانتی مترمربع

برای تعیین این مستطیل باید طول و عرض آن را تعیین کنیم. اگر چنین مستطیلی وجود داشته باشد ضلعهای آن را با x' و x'' نشان می دهیم. فرضیات مسئله به معنای آن است که

$$x'x''=۲۸\ ,\ x'+x''=۱۱$$

x' و x'' ریشه های معادله درجه دوم $(x-x')(x-x'')$ هستند. از طرف دیگر

$$(x-x')(x-x'')=x^۲-(x'+x'')x+x'x''=x^۲-۱۱x+۲۸$$

بنابراین برای یافتن جواب مسئله کافی است جوابها معادله $x^۲-۱۱x+۲۸=۰$ را حساب کنیم. با حل این معادله نتیجه می شود: $x'=۴$ و $x''=۷$. به طور کلی:

اگر α و β دو عدد دلخواه و $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$، آنگاه α و β جواب‌های معادله‌ی $x^۲-Sx+P=۰$ هستند.

مثال: معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که جواب‌های آن ۲ و ۳ باشد.

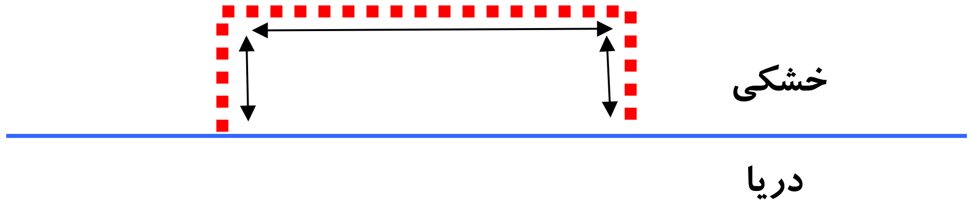
روش اول: داریم $S=x'+x''=۲+۳=۵$ و $P=x'\times x''=۲\times۳=۶$، پس ۲ و ۳ جوابهای معادله‌ی $x^۲-۵x+۶=۰$ هستند.

روش دوم: $(x-۲)(x-۳)=۰$ معادله ای است که مستقیما دیده می شود ۲ و ۳ جوابهای آن هستند. این یک معادله ی درجه دوم است و پس از انجام عمل ضرب به شکل $x^۲-۵x+۶=۰$ در می آید.

ماکزیموم و مینیموم توابع درجه دوم

حل یک مسئله

بیشترین مساحت قطعه زمینی مستطیل شکل کنار دریا که می‌توان آن را فقط با ۱۲۰ متر نرده محصور کرد چقدر است؟



برای فهمیدن درست مسئله شکلی مانند بالا رسم می کنیم. برای حل مسئله باید تشخیص دهیم چه چیزی را باید به دست آوریم. در اینجا یافتن طول مستطیل برای حل مسئله کافی است. طول این زمین مستطیل شکل را با x نشان می دهیم. پس عرض زمین برابر $\frac{120-x}{2}$ خواهد بود. اگر مساحت این زمین را با A نشان دهیم، داریم:

$$A = x(60-\frac{x}{2}) = -\frac{x^2}{2}+60x$$
$$= -\frac{1}{2}(x^2-120x) = -\frac{1}{2}[(x-60)^2-3600] = -\frac{1}{2}(x-60)^2+1800$$

بیشترین مقدار A وقتی است که $x-60=0$ و در نتیجه $x=60$. پس با انتخاب طول ۶۰ متر بیشترین

مساحت ساخته می شود که برابر ۱۸۰۰ مترمربع خواهد بود.

فعالیت

تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید که در آن $a \neq 0$.

۱- درستی محاسبات زیر را توضیح دهید.

$$f(x) = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

۲- اگر $a<0$ به ازای چه مقداری از x تابع f بیشترین مقدار را خواهد یافت؟

۳- اگر $0<a$ به ازای چه مقداری از x تابع f کمترین مقدار را خواهد یافت ؟

از این فعالیت قضیه زیر به دست می آید.

> تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ در حالت $a>0$ به کمترین مقدار (مینیمم) و در حالت $a<0$ به بیشترین مقدار (ماکزیمم) خود می رسد.

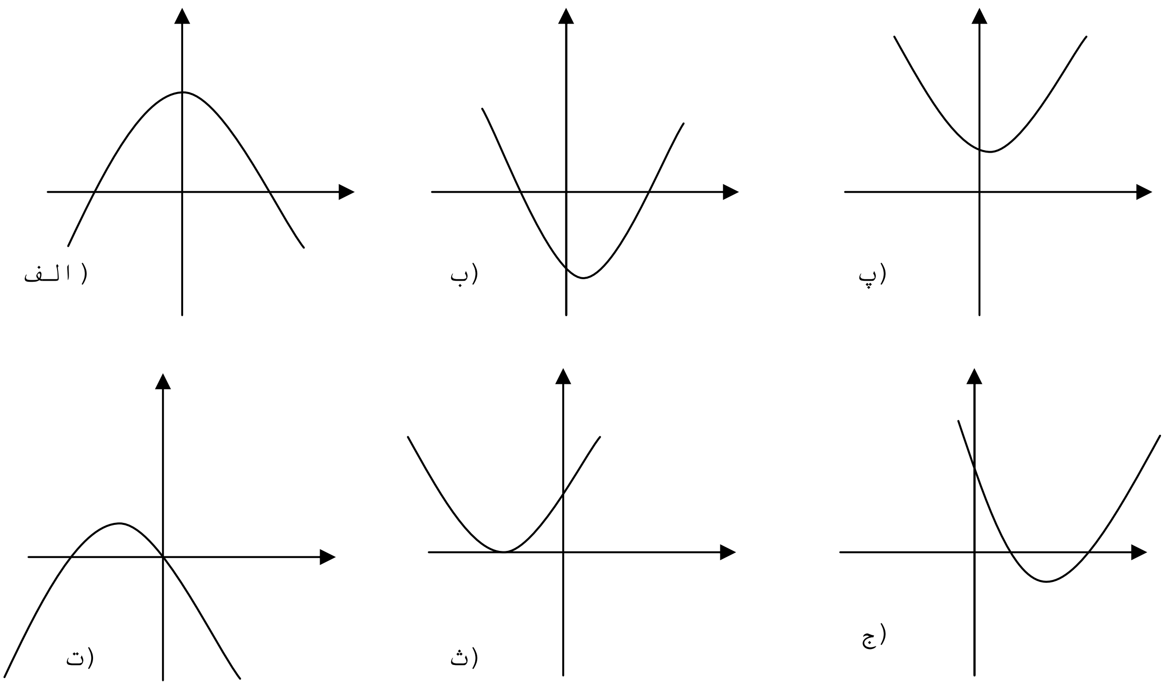
مثال: کمترین مقدار تابع $f(x)=3x^2-12x+5$ را تعیین می کنیم.

به ازای $x=\frac{12}{6}=2$ تابع کمترین مقدار را داراست. از آنجا که $f(2)=-7$، کمترین مقدار تابع برابر ۷- می‌باشد.

تمرین در کلاس

۱- اگر جمع دو عدد $\frac{7}{6}$ و حاصل ضربشان $\frac{-1}{2}$ باشد آن دو عدد را بیابید.

۲- در هر یک از شکل‌های زیر سهمی به معادله $P(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. در هر مورد علامت ضرایب a, b, c و تعداد ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ را تعیین کنید.



۳- نشان دهید در بین مستطیل هایی که محیط شان مقدار ثابتی است، مربع دارای بیشترین مساحت است.

حل یک مسئله

یک معادله چندجمله ای با ضرایب صحیح بیابید که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ یک جواب آن

عباس: جواب این مسئله بسیار ساده است کافی است چندجمله ای $x-(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$ را در نظر بگیریم.

معلم: در این چندجمله ای اعداد غیر صحیح بکار رفته است و این جواب مسئله نیست.

حسن: ما چگونه می توانیم چنین معادله ای بسازیم؟

معلم: بهتر است اول در حالت ساده تری این مسئله را حل کنید. مثلا معادله ای با ضرایب صحیح بسازید که $\sqrt{۲}$ یک جواب آن باشد.

عباس: ما قبلا به چنین معادله ای برخورد کرده ایم. کافی است معادله $x^{۲}-۲=۰$ را در نظر بگیریم.

معلم: این معادله را چگونه می توانید به دست آورید؟

عباس: کافی است در تساوی $x=\sqrt{۲}$ طرفین را به توان ۲ برسانیم. نتیجه می شود $x^{۲}=۲$ و سپس معادله $x^{۲}-۲=۰$ به دست می آید.

معلم: بله این روش شما کارساز است. البته توجه دارید که معادله ساخته شده جوابهای دیگری هم دارد. آیا می توانید این روش را برای حل مسئله اصلی هم بکار برید؟

عباس: بهتر است این روش را آزمایش کنیم. قرار می دهیم $x=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$. با به توان دو رساندن طرفین این تساوی می‌توان نوشت $x^{۲}=۵+۲\sqrt{۶}$. متاسفانه هنوز اعداد غیر صحیح در معادله جدید وجود دارند.

معلم: بله هنوز اعداد غیر صحیح وجود دارند و باز هم باید عملیات دیگری را انجام دهید.

عباس: فکر می کنم باز هم باید روش خود را تکرار کنیم. می‌توان نوشت $x^۲ - ۵ = ۲\sqrt{۶}$ و با به توان دو رساندن طرفین این معادله و ساده کردن آن خواهیم داشت: $x^۴ - ۱۰x^۲ + ۱ = ۰$. به نظر می رسد این معادله جواب مسئله باشد.

معلم: بله شما به جواب مسئله رسیده اید. البته این معادله جوابهای دیگری هم دارد و خوب است بقیه ی جوابهای این معادله را هم به دست آوریم. این یک معادله درجه چهار است ولی با در نظرگرفتن $x^۲ = z$ می‌توان آن را به یک معادله‌ی درجه دوم بر حسب z تبدیل کرد: $z^۲ - ۱۰z + ۱ = ۰$. با حل این معادله خواهیم داشت: $z = ۵ \pm ۲\sqrt{۶}$. حال با حل دو معادله ی $x^۲ = ۵ + ۲\sqrt{۶}$, $x^۲ = ۵ - ۲\sqrt{۶}$ خواهیم داشت:

$$x^۲ = ۵ + ۲\sqrt{۶} = (\sqrt{۲} + \sqrt{۳})^۲ \Rightarrow x = \pm(\sqrt{۲} + \sqrt{۳})$$

با همین روش جواب‌های $x = \pm(\sqrt{۲} - \sqrt{۳})$ برای معادله‌ی دیگر به‌دست می‌آیند. این معادله دارای چهار جواب است.

در برخی از معادلات با درنظر گرفتن یک متغیر جدید می توان آن را به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرد.

تمرین در کلاس

معادله‌ی $(x^۲ - ۱)^۴ + (x^۲ - ۱)^۲ - ۲ = ۰$ را حل کنید.

حل یک مسئله

اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \dots + a_۱ x + a_۰$ یک چند جمله ای درجه n باشد که $a_۰ \neq ۰$ و از روی آن چندجمله ای درجه n، $Q(x) = a_۰ x^n + a_۱ x^{n-۱} + \dots + a_{n-۱} x + a_n$ را بسازیم، آیا رابطه ای بین ریشه های این دو چندجمله ای وجود دارد؟ چند جمله ای $Q(x)$ را چندجمله ای وارون $P(x)$ می نامند.

یکی از دانش آموزان که در مورد چگونگی جواب معادلات چندجمله ای فکر کرده بود مسئله بالا برایش مطرح شده بود که آن را با معلم خود در میان گذاشت. معلم نیز این مسئله را برای همه دانش آموزان مطرح کرد تا همه در باره آن فکرکنند و راه حل‌های خودشان را ارائه کنند.

در جلسه‌ی بعدی درس، معلم از دانش آموزان خواست راه‌حل‌های خودشان را ارائه کنند.

علی: به نظر من بهتر است ابتدا در حالتهای خاص که ساده تر است مسئله را بررسی کنیم، مثلا چندجمله ایهای درجه اول و دوم را بررسی کنیم.

معلم: آفرین، این روش شما کمک زیادی به حل یک مسئله می کند. با مشاهده‌ی مسئله در حالتهای خاص می توانیم درک بهتری از جزئیات مسئله پیدا کنیم. حال بگو چه پیشنهادی داری؟

علی: من توانستم حدس بزنم که چه رابطه‌ای بین ریشه‌های دو چندجمله‌ای وجود دارد ولی نتوانستم اثباتی برای آن ارائه کنم. در حالت چندجمله ایهای درجه اول مانند $P(x)=ax+b$ داریم $Q(x)=bx+a$ و ریشه‌های آنها به ترتیب $\frac{-b}{a}$ و $\frac{-a}{b}$ می‌باشند که وارون یک‌دیگرند. در حالت چندجمله‌ایهای درجه‌ی دوم محاسبات پیچیده تر بود و نتوانستم فکر خود را تعقیب کنم.

سعید: جالب است اتفاقاً من نیز همین کار را کردم ولی با چندجمله‌ای درجه دوم خاصی که ریشه‌هایشان را می‌دانستم محاسبه کردم و به همین نتیجه رسیدم. من یک چندجمله‌ای ساده مثل $P(x)=(x+3)(x-4)$ را در نظر گرفتم که ریشه‌هایش را از قبل می‌دانستم. اگر آن را به صورت استاندارد بنویسیم داریم: $P(x)=x^2-x-12$. بنابراین $Q(x)=-12x^2-x+1$ و ریشه‌های آن از دستور کلی معادله‌ی درجه‌ی دوم $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ خواهند شد.

معلم: هر دو روش کارهای خوبی برای حل مسئله انجام داده اند. در هر دو روش این حدس پیش می آید که ریشه‌های دو چندجمله‌ای معکوس یکدیگرند. شما می‌توانید این حدس را در مثال‌های دیگری هم بررسی کنید. حال چگونه می‌توانید این مطلب را برای یک چندجمله‌ای دلخواه ثابت کنید؟ ابتدا بهتر است حدس خود را به شکل دقیقتری بیان کنید. مثلا برای دو چندجمله ای $P(x)=ax^2+bx+c$ و $Q(x)=cx^2+bx+a$ اگر r یک ریشه‌ی $P(x)$ باشد باید تحقیق کنیم که آیا $\frac{1}{r}$ یک ریشه $Q(x)$ می شود؟

علی: پس باید از $P(r)=0$ بتوانیم نتیجه بگیریم $Q(\frac{1}{r})=0$. اما اگر صفر یک ریشه $P(x)$ باشد چنین نتیجه گیری امکانپذیر نخواهد بود.

معلم : لابد صفر نمی تواند ریشه $P(x)$ شود. آیا می توانید این مطلب را بررسی کنید؟

سعید: درست است صفر نمی تواند ریشه $P(x)$ باشد، زیرا $P(0)=a_0 \neq 0$.

معلم: حالا که مطمئن شدید $P(x)$ ریشه صفر ندارد، سعی کنید از فرض $P(r)=0$ حکم $Q(\frac{1}{r})=0$ را به دست آورید.

عباس: پس فرض کنیم $P(r)=ar^2+br+c=0$ اکنون می‌خواهیم $Q(\frac{1}{r})$ را به دست آوریم.

$$Q(\frac{1}{r})=c(\frac{1}{r})^2+b(\frac{1}{r})+a=\frac{c+br+ar^2}{r^2}=\frac{P(r)}{r^2}=0$$

معلم: آفرین، محاسبه را به درستی انجام دادی. انجام این محاسبه در حالت کلی هم چندان مشکل نیست.

اگر r ریشه ای از چندجمله‌ای $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ باشد آن‌گاه $P(r)=0$ بنابراین:

$$\begin{aligned}Q(\frac{1}{r})&=a_0(\frac{1}{r})^n+a_1(\frac{1}{r})^{n-1}+...+a_{n-1}(\frac{1}{r})+a_n\\&=\frac{1}{r^n}(a_0+a_1r+a_2r^2+...+a_{n-1}r^{n-1}+a_nr^n)=\frac{1}{r^n}P(r)=0\end{aligned}$$

بنابراین $\frac{1}{r}$ ریشه‌ی $Q(x)$است.

علی: آیا عکس مطلب هم درست است اگر s ریشه‌ای از $Q(x)$ باشد آیا $P(\frac{1}{s})=0$

معلم: این مطلب بدیهی است زیرا اگر از چندجمله ای $Q(x)$ شروع کنیم و چندجمله ای وارون آن را بسازیم همان $P(x)$ می شود.

برهان نهایی این مسئله مانند یک مبحث ریاضی مختصر و رسمی است و نتایج نهایی فرایند فکر ما را نمایش می‌دهد. ولی مطلب مهم آن است که بدانیم با یک مسئله چگونه برخورد کنیم و راه حلهای خود را به دست آوریم؟ اگر به شیوه‌های کار توجه کنید کاری که ما انجام دادیم آزمایش حالت‌های خاص به منظور دیدن یک الگو برای برهان یک مسأله‌ی کلی بود. از این روش در حل بسیاری از مسائل می‌توان استفاده کرد.

تمرین در کلاس

با استفاده از فرمول ریشه‌های دو معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ و $cx^2+bx+a=0$ را به‌دست‌آورید و نشان دهید ریشه‌های آنها عکس یکدیگرند.

مسائل

۱. در معادله‌ی $2x^2-8x+m=0$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد بیشتر از جواب دیگر باشد m و هر دو جواب را پیدا کنید.

۲. صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=x^3-4x$　　ب) $g(x)=(x+\frac{1}{x})^2+(x+\frac{1}{x})$

۳. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x^3+x^2+3x=0$　　ب) $\frac{3x^2-11}{8}+\frac{74-2x^2}{12}=10$

۴. معادله‌ی درجه دومی بنویسید که:

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{5}$ و $\frac{4}{5}$ باشد.

ب) ریشه‌های آن $1\pm\sqrt{3}$ باشد.

۵. مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را به دست آورید.

فصل اول - نسخه دوم

الف) $f(x)=۹x^{۲}+۶x+۳$ **ب)** $f(x)=۴+۸x-x^{۲}$

۶. اگر $\alpha\,,\beta$ ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $۴x^{۲}-۵x-۵=۰$ باشد معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۱}{\alpha}\,,\frac{۱}{\beta}$ باشد.

۷. بدون حل معادله، و با استفاده از S و P و Δ در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $۵x^{۲}-۷x-۵=۰$ بحث کنید.

۸. از دبیر ریاضی کلاس حسابان سنش را پرسیدند. پاسخ داد: ۲۱ سال بعد سن من توان دوم سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. این دبیر چند سال سن دارد؟

۹. (مسأله‌ای از کتاب جبرو مقابله خوارزمی) کدام عدد(مثبت) است که چون یک سوم آن را با یک و همچنین یک چهارم آن را با یک جمع کنیم و دوحاصل جمع را در هم ضرب کنیم، برابر ۲۰ شود؟

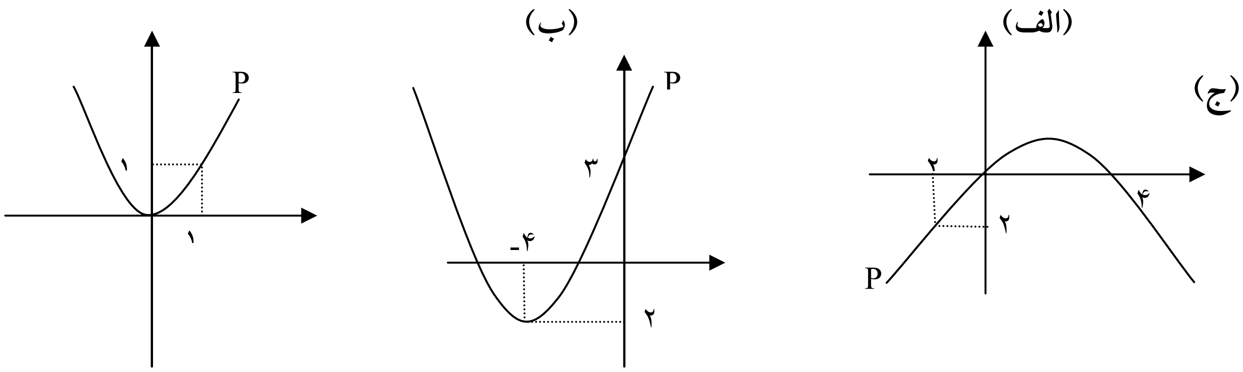
۱۰. در ضرب دو عدد که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است؛ اشتباهی رخ می‌دهد. در نتیجه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می‌شود. برای آزمایش، حاصل‌ضرب را بر عدد کوچکتر تقسیم می کنند. خارج قسمت ۳۹ و باقی مانده آن ۲۲ می شود آن دو عدد را پیدا کنید.

۱۱. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^{۴}-۳x^{۲}+۲=۰$ **ب)** $(\frac{x^{۲}}{۳}-۲)^{۲}-۷(\frac{x^{۲}}{۳}-۲)+۶=۰$ **ج)** $(۴-x^{۲})^{۲}-۲(۴-x^{۲})-۱۵=۰$

۱۲. کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{۲}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x پیدا کنید.

۱۳. در تابع درجه دوم $P(x)=ax^{۲}+bx+c$ در هر یک از حالتهای زیر اولاً علامت $P(x)$ را تعیین کنید ثانیاً ضرایب a و b و c مشخص کنید.



۱۴. محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ مترمربع است. اندازه ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

معادلات شامل عبارات گویا

حل یک مسئله

در یک مزرعه شالیکاری دو کارگر که با هم کار می کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی کار می کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می کرد. هر کدام از این دوکارگر به تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کنند؟

خانم تقوی دبیر دبیرستان ایمان است. او معمولا درس خود را با طرح یک مسئله آغاز می کند. او امروز مسئله بالا را طرح کرد و به دانش آموزان فرصت داد تا روی مسئله کار کنند. سپس از آنها خواست راه حل خود را مطرح کنند.

زهرا: فکر می‌کنم مسئله با تشکیل یک معادله حل می‌شود. فرض می‌کنیم کارگر اول درx روز کار را تمام کند، پس کارگر دوم همین کار را در $x+۱۵$ روز تمام می‌کند. باید فرض اول مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم، اما من نتوانستم این کار را انجام دهم.

خانم تقوی: این دو کارگر با هم در یک روز چه کسری از کار را انجام می‌دهند؟

دانش آموزان: معلوم است $\frac{۱}{۱۸}$ کار را.

خانم تقوی: حال شما مشخص کنید در یک روز هر کارگر چه میزان از کار را انجام می دهد و ببینید چگونه بین این نسبتها می توانید ارتباط برقرارکنید.

سارا: فکر کنم بتوانم ارتباط بین این نسبت‌ها را بنویسم سپس از معلم اجازه خواست و پای تابلو نوشت:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}$$

و توضیح داد که $\frac{۱}{x}$ میزان کار کارگر اول و $\frac{۱}{x+۱۵}$ میزان کار کارگر دوم است و مجموع آنها مجموع کار هر دو کارگر است که برابر $\frac{۱}{۱۸}$ است.

خانم تقوی: شما معادله مورد نظر را پیدا کردید و برای حل مسئله کافی است این معادله را حل کنید. برای حل این معادله باید عبارت متناظر آن را ساده کنیم.

مینا: ما قبلاً برای جمع کسرها از روش هم مخرج کردن استفاده می‌کردیم این‌جا هم می‌توانیم از روش کلی هم مخرج کردن کسرها استفاده کنیم. یک راه را که امسال با آن آشنا شدیم استفاده از کوچکترین مضرب مشترک مخرج هاست. که در این جا همان حاصل‌ضرب مخرج‌ها می‌شود.

$$\frac{x+۱۵+x}{x(x+۱۵)}=\frac{۱}{۱۸} \Rightarrow \frac{۲x+۱۵}{x^۲+۱۵x}=\frac{۱}{۱۸} \Rightarrow ۱۸(۲x+۱۵)=x^۲+۱۵x$$

$$\Rightarrow x^۲-۲۱x-۲۷۰=۰ \Rightarrow (x-۳۰)(x+۹)=۰ \Rightarrow x=۳۰\ ,\ x=-۹$$

جواب $x=-۹$ قابل قبول نیست(چرا؟) و جواب مسئله ۳۰ روز است.

حل یک مسئله

در یک مغازه‌ی ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلولهای آب نمک با غلظت ۷ درصد نگهداری می‌شوند. به علت تازه کار بودن کارگرها، ۲۰۰ کیلو گرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است. چگونه می توان این محلول را به غلظت مورد نظر

حالت اول: فرض می‌کنیم نمک به اندازه‌ی کافی موجود باشد و بتوانیم با اضافه کردن نمک کافی، محلول با ۷ درصد نمک بسازیم. ابتدا محاسبه می کنیم که در محلول فعلی چند کیلوگرم نمک وجود دارد.

$$\frac{۴}{۱۰۰}\times ۲۰۰=۸ \quad \text{کیلو}$$

اگر x کیلوگرم نمک به این محلول بیفزاییم، میزان نمک آب $x+۸$ کیلوگرم می شود و وزن کل محلول $x+۲۰۰$ کیلو می شود، پس برای داشتن محلول ۷ درصدی نمک باید داشته باشیم:

$$\frac{۸+x}{۲۰۰+x}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

با حل این معادله نتیجه می شود $x=\frac{۶۰۰}{۹۳}$. یعنی تقریباً ۶ کیلو و ۳۸۷ گرم نمک باید به محلول اضافه شود.

حالت دوم: اگر نمک به اندازه‌ی کافی موجود نباشد و بخواهیم با تبخیر y کیلو گرم از آب، محلول ۷ درصد نمک بسازیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{۸}{۲۰۰-y}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

با حل این معادله داریم $y=\frac{۶۰۰}{۷}$. یعنی تقریباً ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم آب را باید تبخیر کنیم.

برای حل معادلات شامل عبارات گویا با ضرب طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده، معادله را حل می‌کنیم. جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند. (چرا؟) همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله که از واقعیت می آیند مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز قابل قبول نیستند.

بحث در کلاس

در حل مسئله محلول آب نمک، اگر مقدار نمک موجود در مغازه ۵ کیلوگرم باشد و آن را به محلول اضافه کنیم، چند کیلو گرم از آب محلول را باید تبخیر کنیم تا به هدف مورد نظر برسیم؟

مثال : مجموعه جواب معادله‌ی $\frac{۲x-۳}{۲x+۲}=\frac{۵}{x^{۲}-۱}-\frac{۲x+۳}{۲x-۲}$ را به دست آورید.

ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها را به دست می آوریم. برای این کار ابتدا مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲x - ۲ = ۲(x - ۱) \\ x^۲ - ۱ = (x - ۱)(x + ۱) \\ ۲x + ۲ = ۲(x + ۱) \end{cases}$$

ک.م.م مخرج ها $= ۲(x - ۱)(x + ۱)$

طرفین معادله را در این عبارت ضرب می کنیم.

$$(x + ۱)(۲x + ۳) - ۵ \times ۲ = (x - ۱)(۲x - ۳)$$
$$۲x^۲ + ۳x + ۲x + ۳ - ۱۰ = ۲x^۲ - ۳x - ۲x + ۳$$
$$۱۰x - ۱۰ = ۰$$
$$x = ۱$$

اما $x = ۱$ مخرج کسر معادله را صفر می کند. پس معادله جواب ندارد.

تمرین در کلاس

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\dfrac{۷}{۶} = \dfrac{۲}{t - ۴} - \dfrac{t - ۱}{t + ۴}$ ب) $\dfrac{x + ۲}{x^۲ - ۳x} = \dfrac{۳}{۲x}$ ج) $\dfrac{x - ۴}{x - ۲} = \dfrac{۴}{x(x - ۲)} - \dfrac{۵}{x}$

مسائل

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\dfrac{۶}{p} = ۲ + \dfrac{p}{p + ۱}$ ۲) $\dfrac{k}{۲ - k} + \dfrac{۲}{k} = ۵$ ۳) $۲ + \dfrac{۵}{۳k - ۱} = \dfrac{-۲}{(۳k - ۱)^۲}$

۴) $\dfrac{۳y + ۵}{y^۲ + ۵y} + \dfrac{y + ۴}{y + ۵} = \dfrac{y + ۱}{y}$ ۵) $\dfrac{۳}{m + ۲} + \dfrac{۲}{m} = \dfrac{۴m - ۴}{m^۲ - ۴}$ ۶) $\dfrac{۲}{x - ۳} - \dfrac{۳}{x + ۳} = \dfrac{۱۲}{x^۲ - ۹}$

۷– معلم سوال کرد مجموعه جواب معادله‌ی $\dfrac{x + ۳}{x + ۳} = ۱$ چیست؟ برخی از دانش‌آموزان گفتند: همه اعداد. معلم گفت این جواب صحیح نمی‌باشد؟ جواب صحیح چیست؟

۸- آقای عماد چند اسباب بازی یکسان برای هدیه به مهد کودک خرید که در مجموع قیمت آن‌ها ۱۲۰۰۰ تومان شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان به او تخفیف می‌داد او با همان پول ۴ اسباب‌بازی بیشتر می‌توانست بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی را قبل از تخفیف به دست آورید.

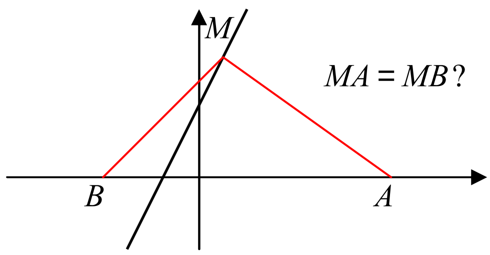
معادلات شامل عبارات گنگ

حل یک مسئله

نقطه‌ای روی خط $y = ۲x + ۱$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(۳,۰)$ و $B(-۱,۰)$ به یک فاصله باشد.

سجاد و صادق دو دانش آموز علاقمند هستند که روی این مسئله کار کرده‌اند.

سجاد: مناسب است برای درک بهتر مسئله شکلی رسم کنیم که مشخصات مسئله در آن دیده شود.



صادق: ما می توانیم نقطه دلخواهی روی خط $y = ۲x + ۱$ در نظر بگیریم و فاصله آن را تا A و B حساب کنیم و ببینیم تحت چه شرایطی این فاصله ها مساوی می شوند.

سجاد: بسیار خوب. اگر این نقطه را M بنامیم چون روی خط $y = ۲x + ۱$ قرار دارد مختصات آن باید به شکل $M(a, ۲a + ۱)$ باشد.

صادق: همچنین باید داشته باشیم $MA = MB$، یعنی

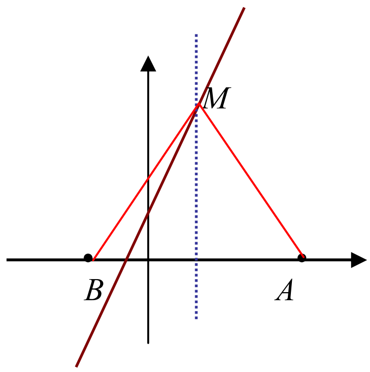
$$MA = \sqrt{(a - ۳)^۲ + (۲a + ۱ - ۰)^۲} = \sqrt{(a + ۱)^۲ + (۲a + ۱ - ۰)^۲} = MB$$

با به توان دو رساندن طرفین این رابطه خواهیم داشت:

$$(a-۳)^۲+(۲a+۱)^۲=(a+۱)^۲+(۲a+۱)^۲$$
$$a^۲-۶a+۹=a^۲+۲a+۱$$
$$a=۱$$

سجاد: پس جواب مسئله نقطه $M(۱\,,۳)$ است.

صادق: این مسئله را می‌توانیم به صورت هندسی نیز حل کنیم. نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله اند روی عمودمنصف پاره خط واصل آن دو نقطه قرار دارند. پس نقطه M روی عمودمنصف AB است؛ ازطرف دیگر M روی خط $y=۲x+۱$ است، پس M محل برخورد این دو خط است.



برخی معادلات دارای عبارهای رادیکالی از مجهول هستند که آنها را معادلات گنگ می نامند. برای حل آنها با توان رسانی طرفین معادله و در صورت لزوم تکرار آن و ساده کردن، معادله ای بدون عبارت گنگ به دست می آید که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده باید در معادله‌ی اصلی آزمایش شوند زیرا عملیات توان رسانی ممکن است جوابهای

مثال: معادله‌ی $\sqrt{۱۵+\sqrt{۲x+۸۰}}=۵$ را حل می کنیم.

با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت:

$$۱۵+\sqrt{۲x+۸۰}=۲۵$$
$$\sqrt{۲x+۸۰}=۱۰$$

دوباره طرفین معادله‌ی اخیر را به توان ۲ می‌رسانیم. خواهیم داشت:

$$۲x+۸۰=۱۰۰ \quad \Rightarrow \quad x=۱۰$$

جواب به دست آمده را در معادله‌ی اصلی قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{۱۵+\sqrt{۲۰+۸۰}}=\sqrt{۱۵+۱۰}=\sqrt{۲۵}=۵$$

تساوی برقرار است و $x=۱۰$ جواب معادله می‌باشد.

مثال: **آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد.**

اگر عدد مورد نظر را x بنامیم باید تساوی $x+\sqrt{x}=۶$ برقرار شود. یعنی

$$\sqrt{x}=۶-x$$

با به توان ۲ رساندن طرفین معادله خواهیم داشت:

$$x=۳۶+x^{۲}-۱۲x$$

با حل این معادله خواهیم داشت:

$$x=۹ \quad , \quad x=۴$$

با آزمایش جواب‌ها در معادله‌ی اصلی دیده می‌شود، $x=۹$ نمی‌تواند مورد قبول واقع باشد و تنها جواب معادله $x=۴$ می‌باشد.

$$x=۴ : \quad ۴+\sqrt{۴}\overset{?}{=}۶$$

$$۴+۲\overset{?}{=}۶$$

$$۶=۶$$

✓

$$x=۹ : \quad ۹+\sqrt{۹}\overset{?}{=}۶$$

$$۹+۳\overset{?}{=}۶$$

$$۱۲=۶$$

×

بحث در کلاس

چرا یکی از جواب‌های معادله‌ی اخیر در معادله‌ی اولیه صدق نمی‌کند؟ این جواب اضافه به چه دلیل ایجاد شده است؟

تمرین در کلاس

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{5q-1}+3=0$ ب) $2\sqrt{x}=\sqrt{3x+4}$ ج) $\sqrt{3-3p}=3+\sqrt{3p+2}$

مسائل

۱. معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{1-x^2}=x$ ب) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1-x$ ج) $2+\sqrt{1+x}=\sqrt{x}$

۲. در هر یک از فرمول‌های زیر متغیر خواسته شده را بر حسب سایر متغیرها بیابید.

الف) $V=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}\quad , \quad k=?$

ب) $F=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{LC}\quad , \quad L=?$

ج) $I=\dfrac{nE}{R+nr}\quad , \quad n=?$

د) $\dfrac{P_1V_1}{T_1}=\dfrac{P_2V_2}{T_2}\quad , \quad T_1=?$

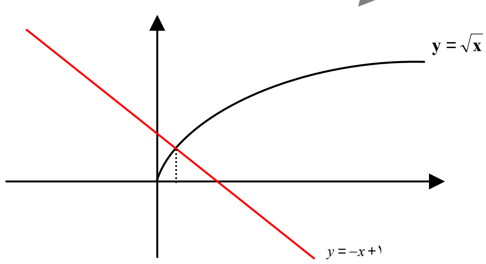
ه) $A=p(1+i)^2\quad , \quad i=?$

حل معادلات به روش هندسی

تا کنون با حل انواعی از معادلات با روشهای جبری آشنا شده ایم. در اینجا می خواهیم با روش دیگری از حل معادلات آشنا شویم که از برخی لحاظ بر روش جبری ارجحیت دارند. دراین روش مقدر تقریبی جوابها و تعداد جوابها آسانتر مشخص می شوند. حتی در برخی مثالها حل جبری امکانپذیر نیست ولی حل با روش هندسی امکانپذیر است.

فعالیت

نمودار دو تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=-x+1$ در روبرو رسم شده است.



۱. اگر طول نقطه تلاقی این دو نمودار a باشد، نشان دهید a یک جواب معادله $-x+۱=\sqrt{x}$ است.

۲. برعکس اگر بدانیم عددی مانند a یک جواب معادله $-x+۱=\sqrt{x}$ است، آنگاه a طول یکی از نقاط تلاقی دو نمودار است؟

۳. از طریق شکل بالا استدلال کنید که معادله $\sqrt{x}=-x+۱$ فقط یک جواب دارد که درفاصله $[۰,۱]$ قرار دارد.

۴. مقدار دقیق جواب معادله $\sqrt{x}=-x+۱$ چیست؟

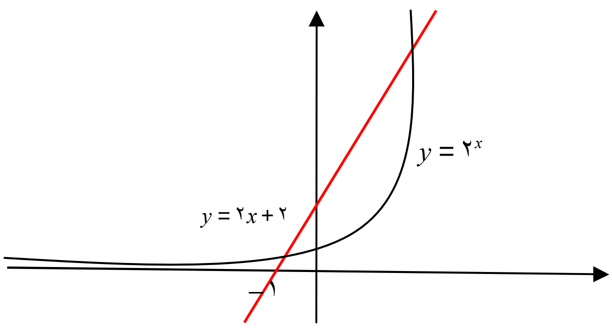
به کمک فعالیت بالا قضیه زیر به دست می آید.

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو تابع باشند؛ طول نقاط محل تلاقی این دو نمودار جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط محل تلاقی این دو نمودار است

این شیوه ی حل معادلات را که از طریق آن تعداد جوابها و مقدار تقریبی جوابها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می نامند.

مثال: معادله‌ی $۲^x=۲x+۲$ را به روش هندسی حل می کنیم.

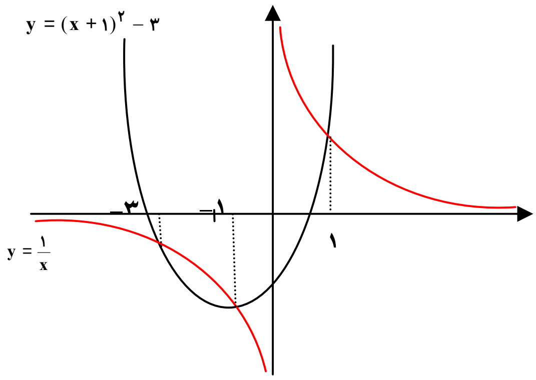
کافی است نمودار توابع $y=۲^x$, $y=۲x+۲$ را رسم کنیم و محل تلاقی نمودارها را به دست آوریم.



از روی نمودار واضح است که معادله دارای جوابی بین ۱- و صفر و یک جواب مثبت است و معادله فقط همین دو جواب را دارد.

جواب مثبت این معادله ۳ است ولی جواب دیگر را به طور دقیق نمی توانیم به دست آوریم اما با روش آزمون و خطا که در سالهای قبل آموخته اید می توانید تقریبات اعشار جواب را با دقت مورد نظر به دست آورید.

مثال: تعداد جواب‌های معادله‌ی $\frac{1}{x}=x^2+2x-2$ را از طریق هندسی می یابیم، سپس با استفاده از روش جبری جواب‌های معادله را به طور دقیق تعیین می کنیم.



نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را می‌شناسید. توجه داریم که این تابع در $x=0$ تعریف نمی‌شود و شامل دو شاخه در ربع اول و سوم خواهد شد. سپس با استفاده از رسم تابع $y=x^2$ و انتقال نمودار آن، تابع $y=x^2+2x-2$ را رسم می‌کنیم. توجه داریم که

$$y=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$$

از روی شکل می توان حدس زد که یکی از جواب‌ها ۱ خواهد شد و با جاگذاری $x=1$ در معادله رستی این حدس تایید می شود. شکل نشان می دهد که این معادله دو جواب دیگر هم دارد که منفی هستند. اگر مقدار دقیق جواب‌ها را بخواهیم ابتدا با ضرب طرفین معادله در x آن را به صورت $x^3+2x^2-2x-1=0$ می نویسیم و چون چندجمله ای x^3+2x^2-2x-1 بر $x-1$ بخش‌پذیر خواهد شد، داریم:

$$x^3+2x^2-2x-1=(x-1)(x^2+3x+1)=0$$

در نتیجه $x=1$, $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

تمرین در کلاس

۱. معادله $\sqrt{x+1}-x^2=2x+1$ را به روش هندسی و جبری حل کنید و جواب‌های به دست آمده را مقایسه کنید.

۲. تعداد جواب‌های معادله $x-2\sin x=0$ را مشخص کنید.

۳. از طریق جبری و هندسی نشان دهید معادله $\sqrt{x}=x+۱$ جواب ندارد.

مسائل

۱. با روش هندسی به طور تقریبی هر یک از معادلات زیر را حل کنید و در صورت امکان جوابهای دقیق را با روش جبری به دست آورید.

الف) $\sqrt{x-۱}=x-۳$ ب) $\frac{۲x-۱}{x}=۵-x$

ج) $۲^x=x^۲$ د) $\sqrt{x}+۲x=x^۲+۲$

۵. به روش نقطه یابی نمودار تابع $y=x^۳$ را رسم کنید. سپس با استفاده از انتقال نمودار تابع $y=(x+۱)^۳$ را رسم کنید و جواب‌های معادله‌ی $(x+۱)^۳=-۳x+۵$ را با روش هندسی به طور تقریبی دست آورید.

قدرمطلق و ویژگی‌های آن

در سالهای قبل با مفهوم قدرمطلق و تابع قدرمطلق آشنا شدید. اگر a عددی حقیقی باشد، قدرمطلق a که آن را با $|a|$ نشان می‌دهیم. اگر a مثبت یا صفر باشد، قدرمطلق a ، برابر خود عدد a است و اگر a منفی باشد، قدرمطلق a برابر قرینه a است. این مطلب را به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد.

$$|a|=\begin{cases} a & a\geq ۰ \\ -a & a<۰ \end{cases}$$

تمرین در کلاس

۱– حاصل هریک از عبارات زیر را بدون علامت قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-۲-(-۳)|$ ب) $|۱-\sqrt{۲}|$ ج) $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|$

۲– عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}$ ب) $\sqrt{x^{۴}+۲x^{۲}+۱}$

۳- عبارت « فاصله‌ی بین دو عدد x و a کمتر از ۰/۰۱ است» را با استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

با توجه به تعریف قدرمطلق می‌توان عبارات قدرمطلقی را ساده نمود.

مثال: نمودار $y=|x-۲|+۱$ را رسم می کنیم.

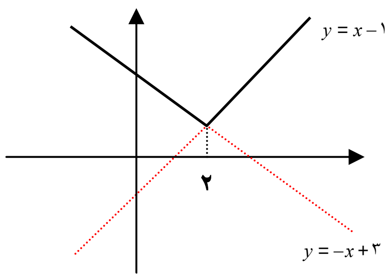
با رسم نمودار این تابع از طریق انتقالهای مناسب نمودار $y=|x|$ آشنا هستید، ولی در اینجا می خواهیم

با استفاده از مفهوم قدرمطلق و ساده کردن عبارت این کار را انجام دهیم.

ابتدا جدول تعیین علامت $x-۲$ را تشکیل می دهیم و از طریق آن علامت $x-۲$ را تشخیص می دهیم.

x		۲	
$x-۲$	$-$	۰	$+$
$\lvert x-۲\rvert$	$-x+۲$		$x-۲$
$\lvert x-۲\rvert+۱$	$-x+۳$		$x-۱$

$$y=|x-۲|+۱=\begin{cases}-x+۳ & x\le ۲\\ x-۱ & ۲<x\end{cases}$$



تمرین در کلاس

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند:

۱– با توجه به این که $\sqrt{a^2}=|a|$ و $\sqrt{b^2}=|b|$ نشان دهید $|ab|=|a||b|$

۲– با فرض $b\neq 0$ و استفاده از قسمت قبل ثابت کنید: $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

۳– اگر $|x|\leq c$ $(c\geq 0)$ با استفاده از استدلال زیر توضیح دهید چگونه می‌توان نتیجه گرفت:

$-c\leq x\leq c$.

$$|x|\leq c \Rightarrow |x|^2\leq c^2 \Rightarrow x^2\leq c^2 \Rightarrow x^2-c^2\leq 0 \Rightarrow (x-c)(x+c)\leq 0$$

x		-c		c	
$(x-c)(x+c)$	+	0	−	0	+

۴– اگر $c\geq 0$ و $-c\leq a\leq c$ ثابت کنید $|a|\leq c$.

مسائل

۱– برای هر عدد حقیقی a نشان دهید $|-a|=|a|$ و $|a|^2=a^2$

۲– برای هر عدد حقیقی a نشان دهید $-|a|\leq a\leq |a|$

۳– برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $-|a|-|b|\leq a+b\leq |a|+|b|$ و نتیجه بگیرید:

$$|a+b|\leq |a|+|b|$$

(خاصیت بالا را خاصیت نامساوی مثلث می نامند.)

۴– برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید: $|y|\leq |x|+|y-x|$ و نتیجه بگیرید:

$$|y|-|x|\leq |y-x|$$

۵– اگر $c>0$ و $|a|>c$ نشان دهید $a>c$ یا $a<-c$.

۶– به کمک تعیین علامت عبارت های داخل قدر مطلق، ضابطه‌ی توابع زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید.

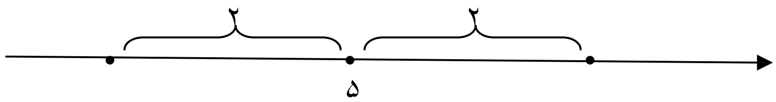
الف) $f(x)=x|x|$ **ب)** $f(x)=|x+۱|-۲$ **ج)** $y=|x-۱|+|x+۲|$

معادلات قدرمطلق

حل یک مسئله

فاصله چه نقاطی روی محور اعداد از نقطه متناظر ۵ برابر ۲

برای حل این مسئله ابتدا شکل زیر را رسم می کنیم.



اگر طول نقطه جواب را x بنامیم شرط مسئله به معنای آن است که $|x-۲|=۵$. این یک معادله بر حسب مجهول x است. شرط $|x-۲|=۵$ به معنای آن است که $x-۲=۵$ یا $x-۲=-۵$. جوابهای هر کدام از این دو معادله جواب معادله $|x-۲|=۵$ می باشند. در نتیجه $x=۷$ و $x=-۳$ دو جواب آن معادله هستند.

به طور کلی قضیه زیر برقرار است.

> جوابهای یک معادله به صورت $|f(x)|=|g(x)|$ همان جوابهای دو معادله $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ روی هم هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارات قدرمطلق هستند **معادلات**

برای یافتن جواب این معادلات با استفاده از خواص قدرمطلق و حذف علامت قدرمطلق معادله‌ی ساده شده را حل می‌کنیم.

مثال: معادله‌ی $|۲x-۳|=|x|$ را حل می کنیم. جوابهای این معادله همان جوابهای دو معادله $۲x-۳=\pm x$ هستند که نتیجه می شود ۳ و ۱ جوابهای آن هستند.

مثال: معادله‌ی $|x+۱|=۴+۲x$ را حل می کنیم.

توجه داریم که سمت چپ عبارت متناظر معادله نامنفی است پس باید داشته باشیم: $۴+۲x\geq ۰$ در نتیجه $x\geq -۲$. حال دو معادله $x+۱=\pm(۴+۲x)$ حل می‌کنیم.

$$x+1=4+2x \Rightarrow x=-3$$

این جواب قابل قبول نیست، زیرا باید $-2 \le x$.

$$x+1=-(4+2x) \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$$

این جواب قابل قبول است.

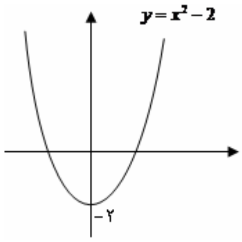
تمرین در کلاس

معادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید.

الف) $\left|\,|x|-1\,\right|=5$ ب) $|2x-1|+|x|=7$ ج) $x|x|=-4$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y=x^2-2$ آمده است.



۱– با توجه به علامت x^2-2 نمودار تابع $f(x)=|x^2-2|$ را رسم کنید.

۲– نمودار $y=2$ را رسم کنید و محل تلاقی آن با نمودار تابع $f(x)=|x^2-2|$ را مشخص کنید

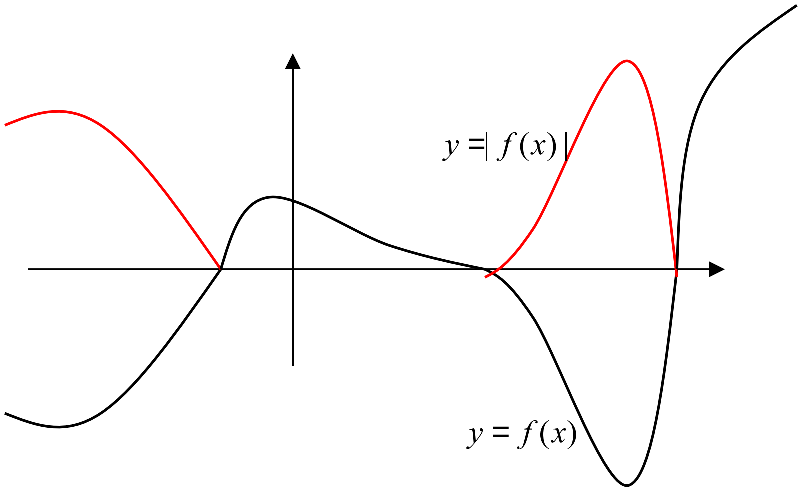
۳– جواب‌های معادله‌ی $|x^2-2|=2$ را با استفاده از بند ۲ به طور تقریبی تعیین کنید.

۴– به روش جبری معادله‌ی $|x^2-2|=2$ را حل کرده و با جواب‌های به دست آمده از در بند ۳ مقایسه کنید.

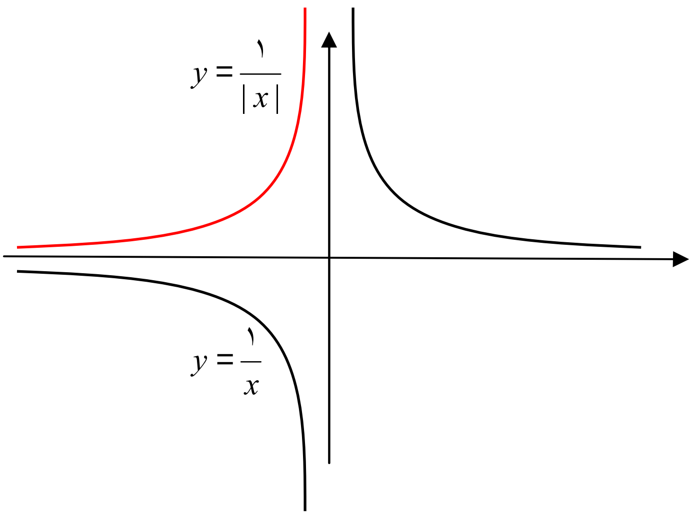
با توجه به تجربه بالا در رسم نمودار تابع $y=|x^2-2|$ می توانید رابطه بین نمودار دو تابع $f(x)$ و $|f(x)|$ را به دست آورید.

در بازه هایی که نمودار $f(x)$ بالای محور xها است $f(x)$ مثبت است و $|f(x)|=f(x)$. یعنی در این بازه ها نمودار $f(x)$ و $|f(x)|$ بر هم منطبق است. اما در بازه هایی که نمودار $f(x)$ پایین محور xها است $f(x)$ منفی است و $|f(x)|=-f(x)$. یعنی در این بازه ها نمودار $|f(x)|$ تصویر آیینه ای نمودار (x)

برای رسم نمودار $|f(x)|$ کافی است نمودار $f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور xها است تصویر آیینه ای نمودار $f(x)$ را رسم کنیم.



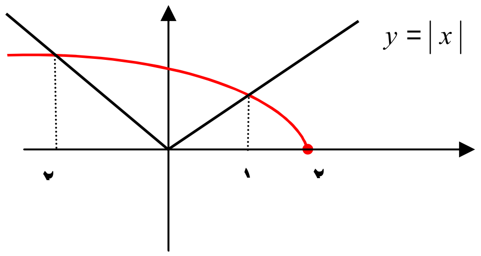
مثال: نمودار تابع $y=\frac{۱}{|x|}$ را رسم می کنیم.



مثال: به روش جبری و نموداری(هندسی) معادله‌ی $|x|=\sqrt{۲-x}$ را حل می کنیم.

در روش جبری با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت: $x^۲ = ۲ - x$ در نتیجه $x^۲ + x - ۲ = ۰$ که جواب‌های آن $x = -۲$, $x = ۱$ هستند که هر دو در معادله‌ی اصلی صدق می‌کنند پس معادله دو جواب دارد.

در روش هندسی نمودارهای توابع $y = |x|$ و $y = \sqrt{۲ - x}$ را رسم می‌کنیم. طولهای محل تلاقی دو نمودار جواب‌های معادله‌اند.

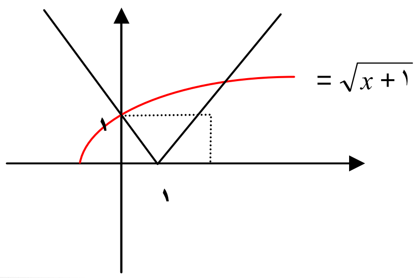


تمرین در کلاس

۱. به روش هندسی جوابهای معادله‌ی $|\sin x| = \frac{۱}{۲}$ را در بازه $[-\pi , \pi]$ به دست آورید.

۲. معادله‌ی $|x^۲ - ۱| = x^۲ - |x|$ را با روش هندسی حل کنید.

۳. در شکل زیر نمودار تابع $y = \sqrt{x + ۱}$ و یک تابع قدرمطلقی که نمودار آن نسبت به خط $x = ۱$ متقارن است دیده می شود. معادله ای که جوابهای آن طول نقاط تلاقی این دو منحنی است را تشکیل دهید و به روش جبری آن را حل کنید.



مسائل

۱– هریک از معادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب آن را مشخص کنید.

الف) $|۲t - ۱| - ۳ = ۰$ ب) $|y^۲ - ۲| = ۷$

ج) $|۲x - ۳| = ۳ - ۲x$

۲– نمودار هریک از روابط زیر را رسم کنید. سپس به ازای $y = ۳$ معادله به دست آمده را با روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y=|\,۲x-۴\,|$ **ب)** $y=|\,x\,|+|\,۱-x\,|$ **ج)** $y=x+\dfrac{x}{|\,x\,|}$

نامعادلات قدرمطلقی

در سال قبل با تعیین علامت چندجمله ایها و استفاده از آن در حل نامعادله های درجه‌ی دوم آشنا شدید. هر نامعادله‌ی درجه دوم را با استفاده از جدول تعیین علامت و خواص نامساوی‌ها می‌توان حل نمود.

تمرین در کلاس

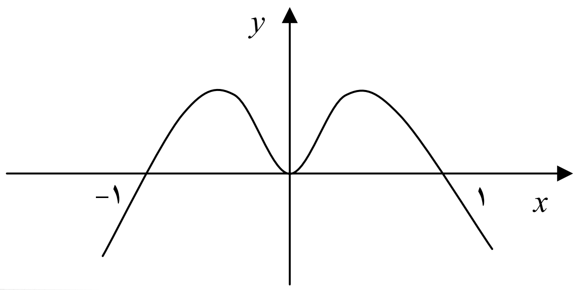
۱– هریک از نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^{۲}-۵x+۶\leq ۰$ ب) $(۱+x^{۲})(۱-x^{۲})\leq ۰$

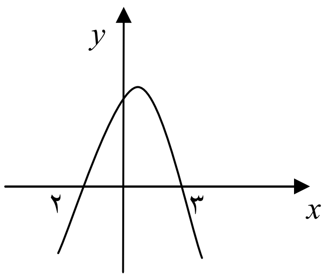
د) $۱+\dfrac{۱}{x}<x$ ج) $(۱-x)(x+۲)>۲x^{۲}-۱$

۲– در هر یک از حالتهای زیر نمودار تابعی، مانند $P(x)$ داده شده است. مجموعه جواب نامعادله‌ی داده شده را مشخص کنید.

$P(x)<۰$

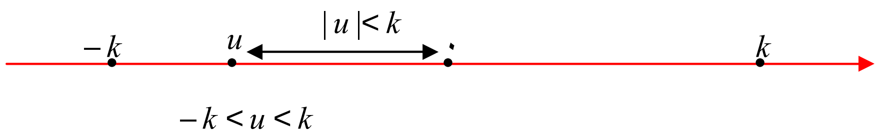


$P(x)\geq ۰$

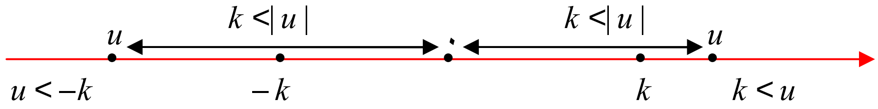


نامعادلاتی که دارای عبارتهای قدرمطلقی هستند، نامعادلات قدرمطلقی می نامند. برای حل این گونه نامعادلات عموما از دو خاصیت مهم قدر مطلق استفاه می کنند.

اگر k عددی مثبت باشد، نامساوی $|\,u\,|\leq k$ معادل با آن است با $-k\leq u\leq k$.



و نامساوی $|u|\geq k$ معادل است با آن که $u\geq k$ یا $-u\geq k$.



مثال: نامعادله‌ی $|۲x-۱|\leq ۷$ را حل می کنیم.

$$|۲x-۱|\leq ۷ \Rightarrow -۷\leq ۲x-۱\leq ۷ \Rightarrow -۶\leq ۲x\leq ۸ \Rightarrow -۳\leq x\leq ۴$$

مجموعه جواب بازه $[-۳\,,۴]$ می‌باشد.

مثال: نامعادله‌ی $|۶-۳x|\geq ۵$ را حل می کنیم.

مجموعه جواب این نامعادله، اجتماع مجموعه جوابهای دو نامعادله $۶-۳x\geq ۵$ و $-(۶-۳x)\geq ۵$ است. مجموعه جواب اولی بازه $(-\infty\,,\frac{۱}{۳}]$ و مجموعه جواب دومی $[\frac{۱۱}{۳}\,,\infty)$ است و اجتماع این دو بازه مجموعه جواب نامعادله اصلی است.

مثال: نامعادله‌ی $|۲x+۱|\geq ۳$ را حل می کنیم.

این نامعادله را می‌توان مانند مثال قبل حل کرد. اما از روش دیگری هم می توانیم استفاده کنیم. با توجه به مثبت بودن طرفین نامساوی، طرفین را به توان دو می‌رسانیم و نامعادله را حل می‌کنیم.

$$(۲x+۱)^۲\geq ۹ \Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱\geq ۹ \Rightarrow ۴x^۲+۴x-۸\geq ۰ \Rightarrow x^۲+x-۲\geq ۰$$
$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱)\geq ۰$$

برای حل نامعادله‌ی اخیر از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم.

x		-۲		۱	
$P=(x+۲)(x-۱)$	+		−		+
	$۰\leq P$				جواب
		جواب		جواب	

مجموعه جواب $=(-\infty\,,-۲\,]\cup[\,۱\,,+\infty)$

تمرین در کلاس

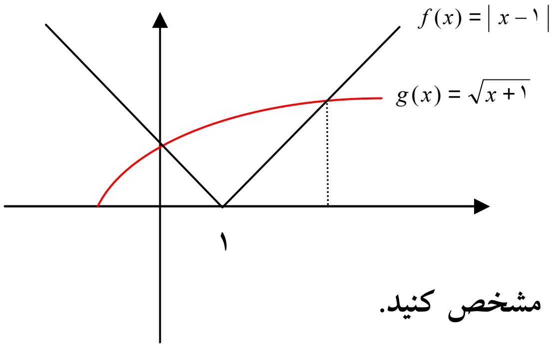
مجموعه جواب هریک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

الف) $|x-۱|\leq\sqrt{x+۱}$ ب) $|۲-۳x|>۵$

حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)

فعالیت

در شکل زیر نمودار توابع $f(x)=|x-۱|$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ رسم شده است.



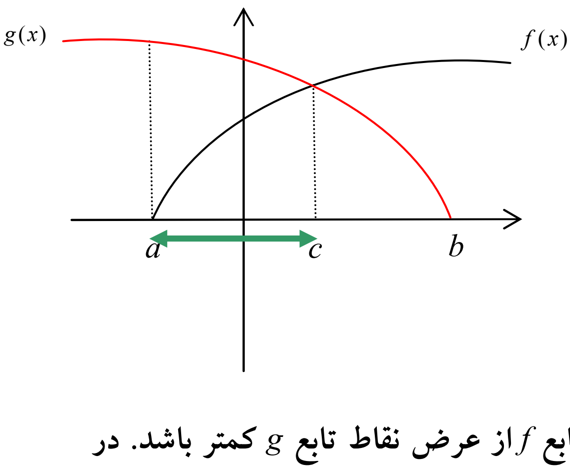
۱- مجموعه ی نقاط x که $f(x)\le g(x)$ را از طریق شکل مشخص کنید.

۲- مجموعه ی نقاط x که در آن نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می گیرد را مشخص کنید.

۳- این دو مجموعه چه رابطه ای با هم دارند؟

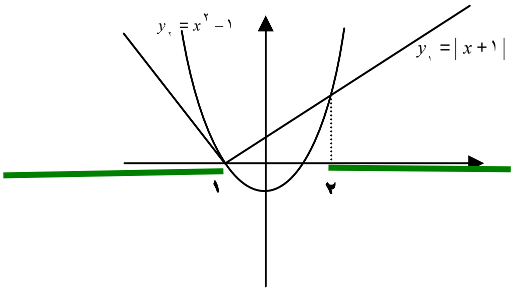
یک نامعادله ی دلخواه را می توان به شکل $f(x)\le g(x)$ نوشت که f و g دو تابع می باشند. در حالت کلی حل جبری چنین نامعادله ای ممکن است بسیار پیچیده و حتی ناممکن باشد.

اما اگر بتوانیم نمودارهای این توابع را رسم کنیم، مجموعه جواب این نامعادله دقیقا برابر مجموعه نقاطی مانند xاست که در این نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می گیرد.



برای مشخص کردن مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x)<g(x)$ پس از رسم توابع f و g مقادیری از دامنه مشترک دو تابع را مشخص می کنیم که عرض نقاط تابع f از عرض نقاط تابع g کمتر باشد. در شکل بالا دامنه‌ی مشترک دو تابع $[a,b]$ می‌باشد. فقط در بازه‌ی (a,c) ، عرض نقاط منحنی f از عرض نقاط منحنی g کمتر است، پس جواب نامعادله بازه‌ی (a,c) می‌باشد.

مثال: نامعادله‌ی $|x+1| < x^2 - 1$ را با استفاده از روش نموداری (هندسی) حل می کنیم. نمودار توابع $y_1 = |x+1|$ و $y_2 = x^2 - 1$ را رسم می‌کنیم.

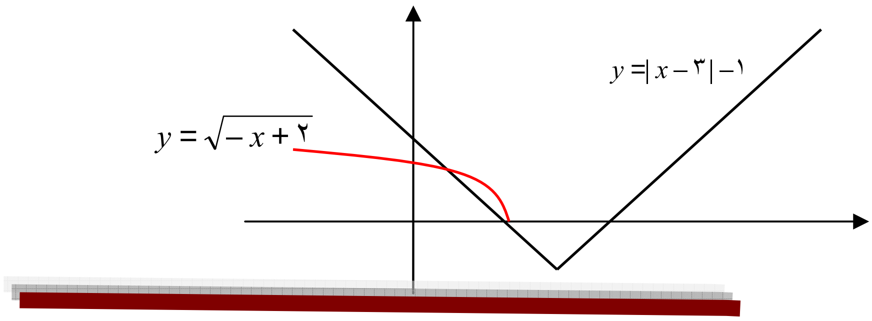


باید مجموعه نقاطی را تعیین کنیم که در آن نقاط نمودار y_1 زیر نمودار y_2 واقع شده باشد.

اجتماع دو بازه $(-\infty , -1)$ و $(2 , \infty)$ مجموعه جواب نامعادله است.

تمرین در کلاس

با توجه به نمودارهای رسم شده، نامعادله‌ی $\sqrt{-x+2} \geq |x-3| - 1$ را حل کنید.



مسائل

نامعادلات زیر را با روش جبری حل کنید.

$1)\ x^3 - 2x^2 + x \geq 0 \qquad 2)\ \dfrac{2x-1}{x} > 1 \qquad 3)\ \dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x-1} \leq 2 \qquad 4)\ |x-2| \leq x$

نامعادلات زیر را با روش هندسی حل کنید و مجموعه جواب به دست آورید.

$5)\ x^2 \leq 2^x \qquad 6)\ \sqrt{x-1} < |x-1| \qquad 7)\ \dfrac{1}{x} < \sqrt{x}$

نامعادلات زیر را با روش هندسی یا جبری حل کنید.

$8)\ x+1 < |x| \qquad 9)\ |x^2 - 1| \leq |x+1| \qquad 10)\ |x| + |x-1| \leq 5$